問題４

$\boxed{\text{着眼点}}$

$f^{[x]}(t)$ や $f^*(x)$ のように見たことのないものがでてきますが，例をなぞってみるとわかってくると思います。(1)では $f^*(x)$ の定義に従って $f^{[x]}(t)$ の最大値を求めます。(1)を通して問題を把握すれば，(2)と(3)は何をすればよいかわかると思います。(4)では場合分けが出てきて少し難しいですが，落ち着いて考えてください。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1) $f^{[x]}(t)=xt-f(t)=xt-\left(\frac{1}{4}t^2-t+1\right)=-\frac{1}{4}t^2+(x+1)t-1$

$$=-\frac{1}{4}\{t-2(x+1)\}^2+x^2+2x$$

ゆえに，　$f^*(x)=x^2+2x$

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ （$a>0$）とおく。

$$f^{[x]}(t)=xt-f(t)=xt-(at^2+bt+c)=-at^2+(x-b)t-c$$

$$=-a\left(t-\frac{x-b}{2a}\right)^2+\frac{(x-b)^2}{4a}-c=-a\left(t-\frac{x-b}{2a}\right)^2+\frac{1}{4a}x^2-\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a}-c$$

$-a<0$ だから，$f^*(x)$ は存在し，$f^*(x)=\frac{1}{4a}x^2-\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a}-c$

よって，$f^*(x)$ は x^2 の係数が正である 2 次関数である。

(3) (2)で求めた 2 次関数 $f^*(x)=\frac{1}{4a}x^2-\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a}-c$ において

$$A=\frac{1}{4a},\quad B=-\frac{b}{2a},\quad C=\frac{b^2}{4a}-c$$

とおく。すなわち，$f^*(x)=Ax^2+Bx+C$ である。このとき，(2)から

$$f^{**}(x)=\frac{1}{4A}x^2-\frac{B}{2A}x+\frac{B^2}{4A}-C=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{4a}}x^2-\frac{-\frac{b}{2a}}{2\cdot\frac{1}{4a}}x+\frac{\left(-\frac{b}{2a}\right)^2}{4\cdot\frac{1}{4a}}-\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)$$

$$=ax^2+bx+c$$

ゆえに，2 次関数 $f^{**}(x)$ はもとの 2 次関数 $f(x)$ と一致する。

(4) $f^{[x]}(t)=\begin{cases} xt-t^2 & (t\geqq 0) \\ xt-(t^2-2t) & (t<0) \end{cases}$

$$=\begin{cases} -\left(t-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{4}x^2 & (t\geqq 0) \\ -\left(t-\frac{x+2}{2}\right)^2+\frac{1}{4}x^2+x+1 & (t<0) \end{cases}$$

（i） $x\geqq 0$ のとき

下図のグラフ①より，$f^{[x]}(t)$ は $t=\frac{x}{2}$ で最大値をとるから

$$f^*(x)=f^{[x]}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}x^2$$

（ⅱ） $-2<x<0$ のとき

下図のグラフ②より，$f^{[x]}(t)$ は $t=0$ で最大値をとるから

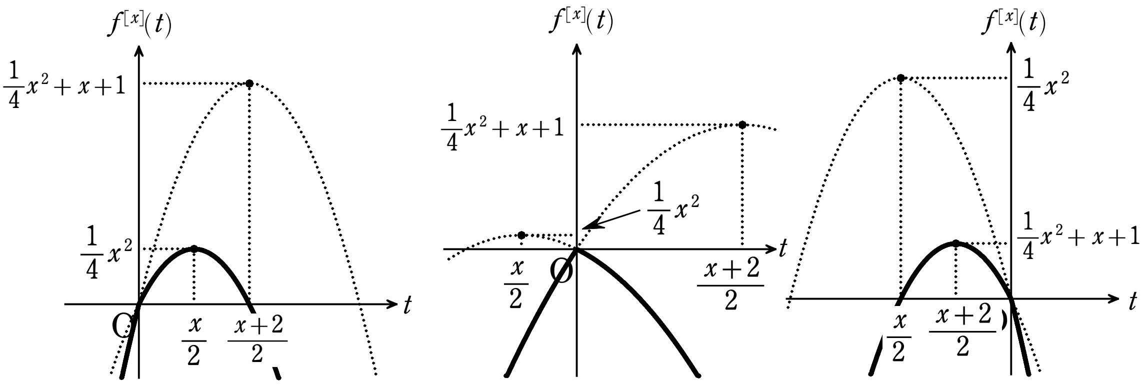
$$f^*(x)=f^{[x]}(0)=0$$

（ⅲ） $x\leqq -2$ のとき

下図のグラフ③より，$f^{[x]}(t)$ は $t=\dfrac{x+2}{2}$ で最大値をとるから

$$f^*(x)=f^{[x]}\left(\frac{x+2}{2}\right)=\frac{1}{4}x^2+x+1$$

【グラフ①】　【グラフ②】　【グラフ③】



（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）より

$$f^*(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x^2 & (x\geqq 0)\\ 0 & (-2<x<0)\\ \dfrac{1}{4}x^2+x+1 & (x\leqq -2)\end{cases}$$

次に，$f^{**}(x)$ を求める。

$f^{*[x]}(t)=xt-f^*(t)$ であったから

$$f^{*[x]}(t)=\begin{cases}xt-\dfrac{1}{4}t^2 & (t\geqq 0)\\ xt & (-2<t<0)\\ xt-\left(\dfrac{1}{4}t^2+t+1\right) & (t\leqq -2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}(t-2x)^2+x^2 & (t\geqq 0)\\ xt & (-2<t<0)\\ -\dfrac{1}{4}\{t-2(x-1)\}^2+x^2-2x & (t\leqq -2)\end{cases}$$

（ⅰ） $x\geqq 0$ のとき

下図のグラフ④より，$f^{*[x]}(t)$ は $t=2x$ で最大値をとるから

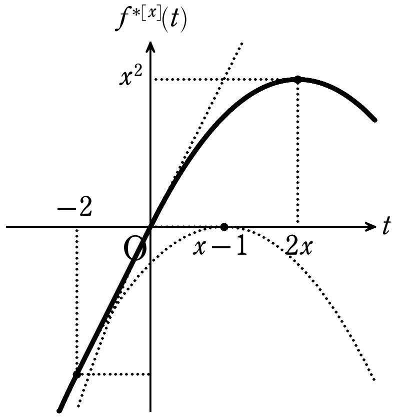
$$f^{**}(x)=f^{*[x]}(2x)=x^2$$

（ⅱ） $x<0$ のとき

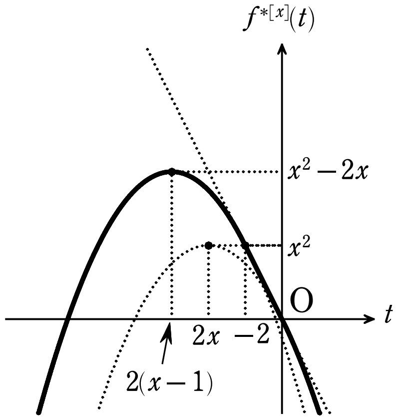
下図のグラフ⑤より，$f^{*[x]}(t)$ は $t=2(x-1)$ で最大値をとるから

$$f^{**}(x)=f^{*[x]}(2(x-1))=x^2-2x$$

【グラフ④】



【グラフ⑤】



(ⅰ), (ⅱ)より

$$f^{**}(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geqq 0) \\ x^2-2x & (x<0) \end{cases}$$

したがって，関数 $f^{**}(x)$ ともとの関数 $f(x)$ は一致する。