

問題 3

実数値関数 $f(x)$ は次の条件 (I) から (VI) を満たしている。

$$(I) \quad f(x+y) \geq f(x) + f(y) - 1$$

$$(II) \quad f(2x) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) - 1$$

$$(III) \quad x > 0, y > 0 \text{ のとき, } f(xy) \geq f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 2$$

$$(IV) \quad x, y \text{ がともに整数のとき, } f(xy) = f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 2$$

$$(V) \quad f(-1) = 0$$

$$(VI) \quad f(2) = 3$$

次の問いに答えなさい。

(1) 条件 (II) に $x=0$ を代入して、 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を求めなさい。

(2) 次の値を求めなさい。

$$\textcircled{1} f(0) \quad \textcircled{2} f(1) \quad \textcircled{3} f(-2) \quad \textcircled{4} f\left(\frac{1}{16}\right)$$

(3) x が整数のとき、 $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ を証明しなさい。

(4) $f\left(\frac{17}{2}\right)$ の値を求めなさい。