

問題 3

着眼点

- (1) 条件(Ⅱ)の式に $x=0$ とすれば容易に $f\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を求めることができる。
- (2) 条件(Ⅰ), (Ⅲ), (Ⅳ)を利用する。
- (3) 条件(Ⅱ), (Ⅳ)を利用する。
- (4) (3)の結果を利用する。

解答例

- (1) 条件(Ⅱ)より, $x=0$ を代入すると

$$f(0) = f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

よって $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

- (2)① 条件(Ⅳ)に $x=0$, $y=2$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0)f(2) - f(0) - f(2) + 2 \\ &= 3f(0) - f(0) - 3 + 2 \end{aligned}$$

よって $f(0) = 1$

- ② 条件(Ⅳ)に $x=-1$, $y=-1$ を代入すると

$$f(1) = (f(-1))^2 - 2f(-1) + 2 = 2$$

- ③ 条件(Ⅳ)に $x=-2$, $y=-1$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(2) &= f(-2)f(-1) - f(-2) - f(-1) + 2 \\ 3 &= -f(-2) + 2 \end{aligned}$$

よって $f(-2) = -1$

- ④ 条件(Ⅲ)に $x=y=\frac{1}{2}$ を代入すると

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \geq \left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 1$$

よって $f\left(\frac{1}{4}\right) \geq 1$

条件(Ⅰ)に $x=y=\frac{1}{4}$ を代入すると

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 2f\left(\frac{1}{4}\right) - 1$$

よって $f\left(\frac{1}{4}\right) \leq 1$

ゆえに $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$

条件(Ⅲ)に $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$ を代入すると

$$f\left(\frac{1}{8}\right) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right) + 2 = 1 - 1 - 1 + 2 = 1$$

$$\text{よって} \quad f\left(\frac{1}{8}\right) \geq 1$$

条件(Ⅰ)に $x=y=\frac{1}{8}$ を代入すると

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \geq 2f\left(\frac{1}{8}\right) - 1$$

$$\text{よって} \quad f\left(\frac{1}{8}\right) \leq 1$$

$$\text{ゆえに} \quad f\left(\frac{1}{8}\right) = 1$$

条件(Ⅲ)に $x=y=\frac{1}{4}$ を代入すると

$$f\left(\frac{1}{16}\right) \geq \left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2 - 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$$

$$\text{よって} \quad f\left(\frac{1}{16}\right) \geq 1$$

条件(Ⅰ)に $x=y=\frac{1}{16}$ を代入すると

$$f\left(\frac{1}{8}\right) \geq 2f\left(\frac{1}{16}\right) - 1$$

$$\text{よって} \quad f\left(\frac{1}{16}\right) \leq 1$$

$$\text{ゆえに} \quad f\left(\frac{1}{16}\right) = 1$$

(3) x は整数なので、条件(Ⅳ)より

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(2)f(x) - f(2) - f(x) + 2 \\ &= 3f(x) - 3 - f(x) + 2 \\ &= 2f(x) - 1 \end{aligned}$$

条件(Ⅱ)に代入すると

$$2f(x) - 1 = f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) - 1$$

$$\text{ゆえに,} \quad f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

(4) (3)より

$$f\left(\frac{17}{2}\right) = f\left(8 + \frac{1}{2}\right) = f(8)$$

したがって、 $f(8)$ を求めればよい。

ここで、条件(Ⅳ)に $x=y=2$ を代入すると

$$f(4) = (f(2))^2 - 2f(2) + 2 = 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 5$$

条件(Ⅳ)に $x=4, y=2$ を代入すると

$$f(8) = f(4)f(2) - f(4) - f(2) + 2 = 5 \cdot 3 - 4 - 3 + 2 = 9$$

$$\text{よって} \quad f\left(\frac{17}{2}\right) = f(8) = 9$$

※ $f(x)=[x]+1$ として作問しました。