$\boxed{\text{コメント}}$

n 角形においての合同条件を「すべての角と辺が等しい」とするとき，帰納的に次の 3 条件が同値条件といえる。これがベストであることが本問の四角形の議論でなされている。

(1) すべての辺と $(n-3)$ 個の角が等しい

(2) 1 本を除く辺とそれらの辺のはさむ $(n-2)$ 個の角が等しい

(3) 連続する $(n-2)$ 本の辺とすべての角が等しい

$\boxed{\text{解答例}}$

1

1.1 対応する 2 組の辺とそのはさむ角が等しい

1.2 (1)$\Rightarrow$(3) について

余弦定理より $\cos A$，$\cos A'$ はともに 3 辺で表せる。3 辺が等しいので，$\cos A=\cos A'$ となり，$A=A'$ となる。

また，同様に $B=B'$ も成り立つので，1 辺とその両端の角が等しい。

(3)$\Rightarrow$(2) について

条件より，等しい 1 辺 $\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$ の対角も等しく，$A=A'$。これより，外接円の半径を R, R' とすると，正弦定理から

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R,\quad \frac{\mathrm{B'C'}}{\sin A'}=2R'$$

よって，$R=R'$

したがって，2 つの三角形において，正弦定理から

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin B}=2R=\frac{\mathrm{A'C'}}{\sin B'}\qquad \text{ゆえに，}\quad \mathrm{AC}=\mathrm{A'C'}$$

したがって，2 辺とそのはさむ角が等しい。

(2)$\Rightarrow$(1) について

等しい 2 辺とそのはさむ角を $\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$，$\mathrm{CA}=\mathrm{C'A'}$，$C=C'$ とすると，余弦定理から

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\cos C$$

$$\mathrm{A'B'}^2=\mathrm{B'C'}^2+\mathrm{C'A'}^2-2\mathrm{B'C'}\cdot\mathrm{C'A'}\cos C'$$

以上より，$\mathrm{AB}^2=\mathrm{A'B'}^2$

$\mathrm{AB}>0$，$\mathrm{A'B'}>0$ から，$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$

すなわち，3 辺が等しい。

1.3 三平方の定理より，1 辺は残り 2 辺の式で表せるので，2 辺が等しいことから，残り 1 辺も等しいことがわかる。逆は明らかに成立する。

1.4 最大角の条件については，2 辺が最大角をはさんでいるときは上の条件(2)なので，合同条件となる。2 辺が最大角をはさんでいないときは，2 辺のうち 1 辺は最大角の対辺となるので，最大角を C, 三角形の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2R$$

よって，2 つの三角形の外接円の半径は等しい。

したがって，2 つの三角形において，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin B}=2R=\frac{\mathrm{A'C'}}{\sin B'}\qquad \text{ゆえに，}\quad \sin B=\sin B'$$

B，B' はともに鋭角なので，$B=B'$。

よって，2 辺とそのはさむ角が等しくなり，合同となる。逆は明らかに成立する。

1.5 B が鈍角の場合は，上の式の $\sin B=\sin B'$ を満たす角 B' が $B'=B$，$180°-B$ の 2 つの可能性があるので，三角形が一つに特定されない。

2

2.1 2 辺とそのはさむ角を持つ四角形の一部の三角形（四角形を対角線で 2 つの三角形に分けたときの三角形）について，2 辺とそのはさむ角が等しいので合同となる。

したがって，三角形の残り 1 辺ともう 1 つのはさまれた角の一部も等しい。

このことから，四角形での残りの三角形について先の 1 辺を含め 2 辺とそのはさむ角が等しいので，合同となる。逆は明らかに成立する。

2.2(1) すべての辺と「２」個の角が等しい

2 つの角が隣り合うとき

このときは2.1より成立する。

2 つの角が向かい合うとき

かりに 1 つの角が優角であるとき，反対の劣角による三角形を考える。

2 つの角を分割しない対角線を引いてできる 2 つの三角形について，四角形のすべての辺が等しいので，2 つの辺が等しく，また，条件より 2 辺とその間の角が等しい。したがって，2 つの三角形はともに1.1(2)より合同となり，対応する角が等しい。

四角形の残り 2 つの角は，上で示した対応する角の和（劣角のとき）あるいは差（優角のとき）で表せるので，四角形のすべての角が等しい。よって，すべての辺と角が等しいので四角形は合同といえる。なお，逆は明らかに成立する。

「２」の最小性について。

（？)=1 とする。このとき，等しい角の対角が劣角と優角（例えば 120°，240°）でできる 2 つの四角形は条件を満たすが，2 つは合同ではない。

(2) 「連続する 2 辺とすべての角が等しい」

2 辺とそのはさむ角を持つ四角形の一部の三角形について，2 辺とそのはさむ角が等しいので合同となる。

したがって，残りの 2 つの角も等しい。

残りの三角形について，等しい 1 辺とその両端の角が等しい。

以上より，先の 1 辺の両端の角が等しくなるので合同となる。逆は明らかに成立する。

反例について。すべての角と対辺の 2 辺が等しいときは，例えば「長方形」のように他の一組の辺を変えることで四角形が変化できる。