問題４

x の３次式で表される方程式を３次方程式という。

$x^3 = a$ のような３次方程式の解を求める場合，３乗して a となる数を考える必要が出てくる。

実数の範囲で３乗して a となる数はただ一つ定まる（a 正でも負でも０でもよい）。この数を３乗根（立方根）a といい，$\sqrt[3]{a}$ と表す。例えば，

$$\sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{0^3} = 0, \quad \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3, \quad \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

となる。なお，３乗根どうしの計算について，$\sqrt[3]{a^2} = (\sqrt[3]{a})^2$，$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$，$\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ 等を用いてもよい。

(1)　$\sqrt[3]{64}$ を求めなさい。また，$(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$ を計算しなさい。

(2)　３次方程式 $x^3 = 7 + 5\sqrt{2}$ を満たす実数 x が正の整数 a，b を用いて $x = a + b\sqrt{2}$ と表せるとき，a，b の値を求めなさい。

(3)　３次方程式 $x^3 = mx + n$ …A の解の１つが実数 p，q を用いて $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$（ただし，$p > q$ とする）と表されたと仮定する。

(ｱ)　３次方程式Ａの左辺に $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ を代入した式を計算しなさい。両辺を比較し，$n = p + q$ と考えて m の値を実数 p，q を用いて表しなさい。

(ｲ)　(ｱ)の結果を用いて，pq 及び $(p-q)^2$ の値を m，n を用いて表しなさい。また，$p-q$ の値を m，n を用いて表しなさい。

(ｳ)　(ｱ)，(ｲ)より p，q の値を m，n を用いて表すことによって，３次方程式 $x^3 = mx + n$ …A の解の１つを表す式を作りなさい。

(4)　３次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ は，$x = z - \dfrac{a}{3}$ とおくことによってＡの形の３次方程式に変形できることを説明しなさい。

(5)　３次方程式 $x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 3x - 3\sqrt{3} - 9 = 0$ を(4)の方法で変形し，この方程式の解の１つを求めなさい。