$\boxed{\text{配点}}$

(1)　6点　　(2)　6点　　(3)(ｱ)　4点　(ｲ)　4点　(ｳ)　4点　　(4)　8点　　(5)　8点

$\boxed{\text{講評}}$

この問題は3次方程式の解の公式を，現代の高校1年終了程度（数学コンテストの出題範囲）の数学の知識で求めてもらおうというものです。2次方程式の解の公式は現在でも高校の数Ⅰの教科書で出てきますが，3次方程式の解の公式については過去も現在も高校の教科書には出てきません。ただし，数Ⅱの教科書には3次以上の高次方程式について因数定理による解法が出てきますし，数Ⅲになると複素数平面に関係する方程式（1の3乗根など）も出てきますが，一般の3次方程式の解法は高校数学ではほとんど見ることはないと思います。熱心な先生が発展的な内容として扱うケースはあるかもしれませんが。

余談になりますが3次方程式，4次方程式の解の公式を知らないうちに，アーベルやガロアが5次以上の代数方程式には解の公式が存在しないことを発見したといわれてもピンとこないと思ったのは私だけでしょうか。

1年次で3次方程式の話をするときに障害になることの一つは平方根が中学で学習済みであるのに対して，3乗根（立方根）については現在の数学教科書では数Ⅱで初めて出てくることもあると思います。さらに，もっと大きな問題としては3次方程式の解をすべて求めるには複素数（数Ⅱで学ぶ虚数）の考え方がどうしても必要になることです。実数係数の2次方程式は，現行の数Ⅰの教科書では実数の範囲で解を持たない場合は「解なし」という表現を使っています。しかし，数Ⅱの教科書では同じことを「虚数解をもつ」といういい方をしています。虚数の導入は数学の歴史上，古代・中世と近代を分ける大きなできごとでした。

2乗してマイナスになる数が存在するという虚数の考え方は，当初は数学の専門家の中でもさまざまな意見を巻き起こし，虚数の存在を拒否する数学者もいたくらいです。しかし，数学だけでなく，物理学の世界でも複素数を用いなければ種々の自然現象が説明できないことがわかり，複素数の考え方の土台の上に現在の文明社会が成り立っています。ただし，今回のコンテストでは虚数を使わないで解の公式を求められるように出題しています。

それでは講評にうつります。基本的に数学コンテストはすべて記述問題です。今回の問題4は(1)のみ基本問題なので答えだけでもマルにしていますが，(2)以降は計算や説明も必須です。説明や式のない場合は減点する場合があります。今後の定期試験や模試，大学入試等でも同じだと思うので注意してください。

まずは，(1)についてです。3次方程式の解を求めるためにはaの3乗根（3乗してaになる数）が必要なのですが，3乗根の考え方や3乗根の記号は現行の教科書では数Ⅱの指数関数・対数関数（指数の拡張）の章で導入されています。そのため1年生も多く受けるコンテストの出題としては3乗根に関する説明がないと問題の根底がわからないと考えて，問題文の中で3乗根の考え方と記号について説明を加えて出題しました。(1)は3乗根の表し方，計算方法に慣れてもらうように考えて出題しました。2年生ですでに指数の拡張について学んでいる人にとっては簡単な問題だったかもしれません。心配だったのは高校1年と2年で大きく出来栄えが違うのではないかということでしたが，(1)の6点満点のうち，2年生の平均は5.74点，1年生の平均が5.17点とやや2年の方が良かったのですが，1年も出来は決して悪くなかったと思います。ただ，3乗根の記号に不慣れだったことが原因と思われるミス（たとえば，aの3乗根を表す$\sqrt[3]{a}$の「3」を係数と読み違え，aの平方根の3倍$3\sqrt{a}$とし

てしまう）は1年のほうが多くいました。(1)の受験者全体の得点率（全員の合計点を人数かける配点で割ったもの）は92.0% でした。

(2)も3乗根の計算です。3乗して $7+5\sqrt{2}$ となる数を求める問題ですが，正の整数 a，b を用いて

$$
\begin{aligned}
(a+b\sqrt{2})^3 &= a^3+3a^2b\sqrt{2}+3a(b\sqrt{2})^2+(b\sqrt{2})^3 = a^3+6ab^2+3a^2b\sqrt{2}+2b^3\sqrt{2} \\
&= a(a^2+6b^2)+b(3a^2+2b^2)\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

となるので，連立方程式 $\begin{cases} a(a^2+6b^2)=7 \\ b(3a^2+2b^2)=5 \end{cases}$ （ただし，a，b は正の整数）　を解けばよいのです。

第一式から，数Aで学ぶ整数の性質を使えば，a，b はともに1以上の整数であるので，$a \geqq 1$，$a^2+6b^2 \geqq 7$。ここで，積が7であることから，$a=1$，$a^2+6b^2=7$ が成り立ち，$a=1$，$b=1$ が導けます。これは第二式も満たしています。今回，(2)では，$\begin{cases} a(a^2+6b^2)=7 \\ b(3a^2+2b^2)=5 \end{cases}$ までで部分点をあげています（3点）。この連立方程式を式変形だけで解こうとして途中で失敗していた人もいました。整数の性質を使わずにこのような3次の連立方程式を解くのは至難です。

また，a，b が正の整数であることから，$a=1$，$b=1$ を代入して式が成り立つことを示して解を求めた人もいました。しかし，厳密には $a=1$，$b=1$ 以外の値について等式が成り立たないことを示さないと（必要十分性），説明としては不十分です。説明抜きで答えだけを書いた人がいたのは残念です。答えのみでは点数がもらえなくなる場合もあります。

別解として不等式を用いて解いた人が一人だけいました（受験番号288　滝沢諒平君）。ユニークな発想に敬意を表します。全体で得点率は58.7% ですが，6点満点中1年の平均2.7点，2年の平均が4.7点と，(2)では学年による違いが出ていました。ひょっとしたら1年生で数A（整数の性質）を1月段階でまだ学んでいない人にとっては不慣れな発想だったかもしれません。

(3)が今回のメインである3次方程式の解の公式です。オイラーの方法は3次方程式 $x^3=mx+n$ の解を2つの3乗根の和で表す（$x=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$）というものですが，今まで私がいろんな本で見た3次方程式の解法の説明の中でも最も自然な方法で，しかもわかりやすいものだと思います。かなり長い計算を3つの枝問に分け，(ア)で3乗の展開式から m を p，q の式で表し，(イ)で逆に $p+q$，$p-q$ を m，n の式で表し，(ウ)で最終的に p，q を m，n の式で表すことによって3次方程式の解の1つを求めるということになります。さらに，3次方程式の残りの解については複素数を用いて解を求める必要があります（もちろんオイラーは最後までやっています）。オイラーはこの当時の数学者の中でも複素数について誰よりも深く考えた人でしたが，導入の部分ではあえて複素数を表に出さずに3次方程式を解いてみせたのではないかと思います（参考　ダンハム著「オイラー入門」）

中世のヨーロッパの数学者たちが生涯をかけて苦労してとりくんだ3次方程式の解法を高校生の皆さんが体験したということになります。いかがだったでしょうか。

(3)の答案のうち，(ア)は196名中71名が正解，(イ)は47名が正解，(ウ)は25名が正解でした。

(3)全体で満点の人（3次方程式の解の公式まで減点なく導いた人）は21名でした。立派なものだと思います。

(3)の得点率は33.4% でした。なお，(3)以降は学年差の影響はほぼありませんでした。

(4)は一般の3次方程式を今回の方法が使える $z^3=mz+n$ の形に変換するものです。(4)は(1)～(3)と独立な内容なので，(3)が手つかずでも(4)はできます（この変形をカルダノ変換とかチルンハウス変換とかいうようです）。しかし，時間切れ，体力切れ(?)のせいか，(4)は最初から手つかずの人も多かったです。手をつけた人の中でも展開のミス，係数をかけるのを忘れたミス，移項して符号が変わる

のを忘れたミスなども多く，せっかくいいところまで行きながら正解に至らなかった答案も多かったです。残念ながら，(4)の正解者は 7 名，得点率は 13.1%でした。

(5)は(4)の方法で $z^3 = mz + n$ の形に変換すると(3)で導いた解の公式で z が求まるので，あとは変形で x を求めるだけです。中には変換したあと因数定理（数Ⅱ）で $z = 3$ が解であることを示してから x を求めた人もいました。(4)の正解者が少なかったこともあり，(5)の正解者は 5 名，得点率は 4.9%でした。

この問題の最高点は 40 点中 39 点（2名　受験番号35　市村優弥君，39　西田耕平君）でした。2 人とも実質的には満点に非常に近い答案でしたので今後とも頑張ってほしいと思います。

なお，問題４に対する特別賞として総合上位に入っていないこの問題の得点上位者の中から，(3)の解の公式を完成させた受験番号232　岩田浩太郎君を選びました。

採点しての感想ですが教科書にも載っていない 3 次方程式の解の公式に多くの人が取り組んでくれて大変うれしく思います。答案の中の感想は「難しい」がほとんどでしたが，「以前から 3 次方程式の解の公式を知りたいと思っていたがこの機会に考えることが出来てうれしい」「計算はすごく面倒だったけど解の公式が導けて楽しかった」などというコメントがもらえて出題者としてもうれしいです。「計算多すぎ」だとか「(1)以外は意味不明」などという正直なコメントもありがたいです

（北海道札幌旭丘高等学校　佐々木光憲）