着眼点

2 次方程式の解については，皆さんも中学でも学んだ解の公式があり，高校 1 年までで学ぶ内容で説明ができます。しかし，3 次以上の方程式の場合，解の公式としてまとめるには虚数（数学Ⅱで学ぶ複素数の内容）を用いることが必要になります。このこともあって，高校 1 年までの数学で 3 次方程式の解の公式を導くことはなかなか難しいと思われていました。

今回紹介した方法は 18 世紀の偉大な数学者オイラーが著作の中で用いた方法です。オイラーは 3 乗根を用いることによって 3 次方程式の解の 1 つを表す式を導いた上で，（複素数を用いて）3 次，4 次方程式のすべての解を求める方法を明示しました。オイラーの発想には現代の視点から見ても感心してしまいます。

解答例

(1) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

$(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)=(\sqrt[3]{2}-1)\{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1\}=(\sqrt[3]{2})^3-1^3=2-1=1$

(2) $(\text{左辺})=(a+b\sqrt{2})^3=a^3+3a^2b\sqrt{2}+3a(b\sqrt{2})^2+(b\sqrt{2})^3=a^3+6ab^2+3a^2b\sqrt{2}+2b^3\sqrt{2}$

よって，　$(a^3+6ab^2)+(3a^2b+2b^3)\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}$

a，b が正の整数であることから，　$a^3+6ab^2=7$，$3a^2b+2b^3=5$

$a^3+6ab^2=7$ から，$a(a^2+6b^2)=7$

a，b が正の整数であることから，a^2+6b^2 も正の整数で，$a^2+6b^2>a^2\geqq a$

したがって，　$a=1$，$a^2+6b^2=7$

ゆえに，　$a=1$，$b=1$

これは，$3a^2b+2b^3=5$ も満たす。

(3)(ア) A の左辺$=(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})^3=(\sqrt[3]{p})^3+3(\sqrt[3]{p})^2\sqrt[3]{q}+3\sqrt[3]{p}(\sqrt[3]{q})^2+(\sqrt[3]{q})^3$

$=p+q+3\sqrt[3]{pq}(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})$

ここで，$\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}=x$ であるから，方程式 A は

$3\sqrt[3]{pq}\,x+p+q=mx+n$

$p+q=n$ より，両辺が一致するならば，　$m=3\sqrt[3]{pq}$

(イ) (ア)より，　$m=3\sqrt[3]{pq}$

両辺を 3 乗すると，　$m^3=27pq$

ゆえに，　$pq=\dfrac{m^3}{27}$

また，　$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=n^2-4\cdot\dfrac{m^3}{27}=n^2-\dfrac{4m^3}{27}$

$p>q$ より $p-q>0$ であるから，　$p-q=\sqrt{n^2-\dfrac{4m^3}{27}}$

(ウ) $p+q=n$ と $p-q=\sqrt{n^2-\dfrac{4m^3}{27}}$ を p，q についての連立方程式として解くと，

$$p=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{n^2-\frac{4m^3}{27}}=\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}}$$

$$q=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{n^2-\frac{4m^3}{27}}=\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}}$$

方程式 A の解 は $x=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ であるから，

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}}}$$

(4) $x^3+ax^2+bx+c=0$ に $x=z-\dfrac{a}{3}$ を代入すると，

$$\left(z-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(z-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(z-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

$$z^3-3z^2\cdot\frac{a}{3}+3z\left(\frac{a}{3}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3+az^2-\frac{2}{3}a^2z+\frac{a^3}{9}+bz-\frac{ab}{3}+c=0$$

$$z^3-az^2+\frac{1}{3}a^2z-\frac{a^3}{27}+az^2-\frac{2}{3}a^2z+\frac{a^3}{9}+bz-\frac{ab}{3}+c=0$$

$$z^3=\frac{1}{3}a^2z-bz+\frac{ab}{3}-\frac{2}{27}a^3-c=\left(\frac{1}{3}a^2-b\right)z+\frac{ab}{3}-\frac{2}{27}a^3-c$$

よって，$m=\dfrac{1}{3}a^2-b$，$n=\dfrac{ab}{3}-\dfrac{2}{27}a^3-c$ とすると，$x^3=mx+n$ の形の方程式になる。

(5) $x^3+3\sqrt{3}\,x^2+3x-3\sqrt{3}-9=0$ において，$x=z-\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=z-\sqrt{3}$ とすると，

$$(z-\sqrt{3})^3+3\sqrt{3}(z-\sqrt{3})^2+3(z-\sqrt{3})-3\sqrt{3}-9=0$$

$$z^3-3\sqrt{3}\,z^2+9z-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}\,z^2-18z+9\sqrt{3}+3z-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}-9=0$$

$$z^3-6z-9=0$$

すなわち，　$z^3=6z+9$

これは，方程式 A で $m=6$，$n=9$ とおいた形であるから，(3)の結果を用いて，

$$z=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{9^2}{4}-\frac{6^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{9^2}{4}-\frac{6^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}-8}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{81}{4}-8}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1}=2+1=3$$

ゆえに，$x=z-\sqrt{3}$ より，方程式 $x^3+3\sqrt{3}\,x^2+3x-3\sqrt{3}-9=0$ の解の 1 つは，$x=3-\sqrt{3}$

別解　変形によって A を導き，因数定理（数学Ⅱ）を用いて $z=3$ が解であることを示してもよい。