着眼点

○中央値，平均値，分散，四分位偏差の計算を理解していることが基本である。

○ 0 点，1 点，2 点，3 点の生徒数を a，b，c，d として，条件を式で表す。

○内容としては，整数問題である。

○分散の最大値と最小値を求めるために，a，b，c，dの係数から式を分析する。
　あるいは，変数を減らし 2 変数とする。

解答例

0 点，1 点，2 点，3 点の生徒をそれぞれ a 人，b 人，c 人，d 人とすると

$$a+b+c+d=40 \quad \cdots ①$$

$$b+2c+3d=72 \quad \cdots ②$$

(1)　$\dfrac{72}{40}=\dfrac{9}{5}=1.8$

(2)　$b=8$，$c=20$のとき，①，②より，$a=4$，$d=8$

よって，0 点の生徒は 4 人，3 点の生徒は 8 人

このとき，分散は，

$$\frac{4\left(0-\frac{9}{5}\right)^2+8\left(1-\frac{9}{5}\right)^2+20\left(2-\frac{9}{5}\right)^2+8\left(3-\frac{9}{5}\right)^2}{40}=\frac{760}{1000}=0.76$$

別解

$$\frac{0^2\times4+1^2\times8+2^2\times20+3^2\times8}{40}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{160}{40}-\frac{81}{25}=\frac{19}{25}=0.76$$

(3)　$b=10$ のとき，　①より　$a+c+d=30$　$\cdots$③

②より　$2c+3d=62$　$\cdots$④

④より　$2c-62=-3d$　ゆえに，　$2(c-31)=-3d$

c，d が整数であることから，左辺は 2 の倍数，右辺は 3 の倍数である。

2 と 3 は互いに素であるから，右辺が 2 の倍数になるためには，$d=2k$（k は整数）が必要である。

a，c は 0 以上 40 以下の整数であることを用いると，

③より　$a+c=30-d$ であるから，　$0\leqq 30-d\leqq 40$　ゆえに，　$-10\leqq d\leqq 30$　$\cdots$⑤

④より　$2c=62-3d$ であるから，　$0\leqq 62-3d\leqq 80$　ゆえに，　$-6\leqq d\leqq \dfrac{62}{3}$　$\cdots$⑥

d が 0 以上 40 以下の整数であることから，　$0\leqq d\leqq 20$　ゆえに，$0\leqq k\leqq 10$　$\cdots$⑦

$d=2k$ のとき，　$2(c-31)=-3\cdot 2k$　より，　$c=31-3k$

$c=31-3k$，$d=2k$ のとき，　③より，　$a+(31-3k)+2k=30$　ゆえに，$a=k-1$

a が 0 以上 40 以下の整数であることから，　$0\leqq k-1\leqq 40$

これと⑦から，　$1\leqq k\leqq 10$

ゆえに，　$(a,\ c,\ d)=(k-1,\ 31-3k,\ 2k)$　ただし，k は $1\leqq k\leqq 10$ を満たす整数

したがって，③，④を満たす a，c，d の組は，

$$(a,\ c,\ d)=(0,\ 28,\ 2),\ (1,\ 25,\ 4),\ (2,\ 22,\ 6),\ (3,\ 19,\ 8),\ (4,\ 16,\ 10),\ (5,\ 13,\ 12),$$
$$(6,\ 10,\ 14),\ (7,\ 7,\ 16),\ (8,\ 4,\ 18),\ (9,\ 1,\ 20)$$

(4)　第 1 四分位数を Q_1，第 3 四分位数を Q_3 とすると，四分位偏差が 1.5 なので，

$$\frac{Q_3-Q_1}{2}=1.5 \qquad ゆえに，\quad Q_3-Q_1=3$$

$0 \leqq Q_1 \leqq 3$，$0 \leqq Q_3 \leqq 3$ より，$Q_1=0$，$Q_3=3$ となるので，40 人の得点を n_1，n_2，…，n_{40}（$n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots \leqq n_{40}$）とすると，

ⅰ）

n_1	…	n_{10}	n_{11}	…	n_{20}	n_{21}	…	n_{30}	n_{31}	…	n_{40}
0		0	0		2	2		3	3		3

ⅱ）

n_1	…	n_{10}	n_{11}	…	n_{20}	n_{21}	…	n_{30}	n_{31}	…	n_{40}
0		0	0		1	3		3	3		3

のいずれかが成り立つ。

すなわち，ⅰ）「$11 \leqq a \leqq 19$，$2 \leqq c \leqq 18$，$11 \leqq d \leqq 19$」，または，ⅱ）「$11 \leqq a \leqq 19$，$c=0$，$d=20$」が成り立つ。

次のように d の値によって場合分けをする。

$d=20$ のとき，②より $b+2c=12$ であるから，これと $c=0$ より，$b=12$ となるが，①より $a=8$ となって，$11 \leqq a \leqq 19$ を満たさないので不適。

$d=19$ のとき，②より $b+2c=15$ であるから，$(a,\ b,\ c)=(11,\ 5,\ 5),\ (12,\ 3,\ 6),\ (13,\ 1,\ 7)$

$d=18$ のとき，②より $b+2c=18$ であるから，$(a,\ b,\ c)=(11,\ 4,\ 7),\ (12,\ 2,\ 8),\ (13,\ 0,\ 9)$

$d=17$ のとき，②より $b+2c=21$ であるから，$(a,\ b,\ c)=(11,\ 3,\ 9),\ (12,\ 1,\ 10)$

$d=16$ のとき，②より $b+2c=24$ であるから，$(a,\ b,\ c)=(11,\ 2,\ 11),\ (12,\ 0,\ 12)$

$d=15$ のとき，②より $b+2c=27$ であるから，$(a,\ b,\ c)=(11,\ 1,\ 13)$

$d=14$ のとき，②より $d+2c=30$ であるから，$(a,\ b,\ c)=(11,\ 0,\ 15)$

$d \leqq 13$ のとき，①より $a+b+c=40-d \geqq 27$

②より $b+2c=72-3d \geqq 33$

これを満たす $(a,\ b,\ c)$ は存在しない。

(5) $$\frac{a\left(0-\frac{9}{5}\right)^2+b\left(1-\frac{9}{5}\right)^2+c\left(2-\frac{9}{5}\right)^2+d\left(3-\frac{9}{5}\right)^2}{40}=\frac{1}{1000}(81a+16b+c+36d)$$

よって，$P=81a+16b+c+36d$ の最大値を求めればよい。

①より，$a=40-b-c-d$ を代入すると

$$P=81a+16b+c+36d=81(40-b-c-d)+16b+c+36d$$
$$=3240-65b-80c-45d$$

さらに，②より，$b=72-2c-3d$ を代入すると

$$P=3240-65(72-2c-3d)-80c-45d=50c+150d-1440$$

以下のように a，b，c，d を変換していくことで分散を大きくできる。

ⅰ）$b \geqq 2$ のときは，b を 2 減らして a，c を 1 増やす

ⅱ）$c \geqq 2$ のときは，c を 2 減らして d，b を 1 増やす

ⅲ）$b=c=1$ のときは，b，c を 1 減らして a，d を 1 増やす

なお，この変換によって生徒数と合計数は変化しない。

したがって，分散が最大になるには，$b+c$ は 1 以下である。

②より，$d=72 \div 3=24$，このとき $b=0$，$c=0$ であり $a=16$

よって，P が最大となるのは，$a=16$，$b=0$，$c=0$，$d=24$ のときで，

分散の最大値は $\dfrac{P}{1000}=\dfrac{50\cdot 0+150\cdot 24-1440}{1000}=2.16$

(6)　$a=b=0$ であるとすると，合計点が $40\cdot 2=80$ 点以上となり，条件の 72 点を上回り不適。

したがって，$a+b\neq 0$ で，以下のように a，b，c，d を変換することで分散を小さくできる。

ⅰ）$a\neq 0$，$d\neq 0$ のとき，a，d を 1 減らして b，c を 1 増やす。

ⅱ）$b\neq 0$，$d\neq 0$ のとき，b，d を 1 減らして c を 2 増やす。

なお，この変換によって生徒数と合計数は変化せず，$a+b$ は 0 にならない。

したがって，この変換により d を減らし続け，$d=0$ とできる。

また，$d=c=0$ とすると，合計点が $40\cdot 1=40$ 以下となり，条件の 72 点を下回り不適。

したがって，$c\neq 0$

よって，以下のように a，b，c を変換することで分散を小さくできる。

ⅰ）$a\neq 0$，$c\neq 0$ のとき，a，c を 1 減らして b を 2 増やす。

この変換によって生徒数と合計数は変化せず，c は 0 にならない。

したがって，この変換により a を減らし続け，$a=0$ とできる。

P が最小となるのは，$a=d=0$ のときであり，$b=8$，$c=32$ のとき，

分散の最小値は $\dfrac{P}{1000}=\dfrac{50\cdot 32+150\cdot 0-1440}{1000}=0.16$

(5)(6)の別解

2 点が x 人，3 点が y 人とすると，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ であり，

②から　$b=72-2x-3y$

よって，$0\leqq b\leqq 40$ より　$0\leqq 72-2x-3y\leqq 40$　　ゆえに，　$32\leqq 2x+3y\leqq 72$

また，①から　$a=40-b-c-d=40-(72-2x-3y)-x-y=x+2y-32$

よって，$0\leqq a\leqq 40$ より　$0\leqq x+2y-32\leqq 40$　　ゆえに，　$32\leqq x+2y\leqq 72$

ここで，$\dfrac{P}{10}=5x+3y-144=k$ とおくと，k の最大値，最小値を求めることになるのだが，これは，数学Ⅱ「領域」の考え方を利用して次の問題に帰着して解くこともできる。

連立不等式

$$32\leqq 2x+3y\leqq 72,\ 32\leqq x+2y\leqq 72,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

の表す領域を D とする。点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$k=5x+3y-144$ のとる値の最大値，最小値を求めなさい。（ただし，x，y は整数値をとるものとする）