

### 問題 3

関数  $f(x)$  は、すべての実数  $x$  で定義された実数値関数であり、次の条件 (I) から (IV) をすべて満たしている。

条件 (I) すべての実数  $x, y$  に対して、 $f(xy) = f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 2$

(II)  $f(2) = 3$

(III)  $x > 1$  のとき、 $f(x) > 2$

(IV)  $f(-1) \neq 0$

次の問いに答えなさい。

(1) 条件 (I) に、 $x=0, y=2$  を代入して、 $f(0)$  の値を求めなさい。

(2) 次の値を求めなさい。

①  $f(1)$       ②  $f(-1)$       ③  $f(\sqrt{2})$

(3)  $f(-x) = f(x)$  を証明しなさい。

(4)  $f(x) \geq 1$  を証明しなさい。また、等号が成り立つときの  $x$  の値を求めなさい。

(5)  $0 < a < b$  のとき  $f(a) < f(b)$ 、 $b < a < 0$  のとき  $f(a) < f(b)$  を証明しなさい。

(6)  $-8 \leq x \leq 4$  のとき、 $f(x)$  の最大値、最小値を求めなさい。また、そのときの  $x$  の値も求めなさい。