

配点

(1) 3点 (2) 3点 (3) 4点 (4) 4点 (5) 6点 (6) 8点 (7) 3点 (8) 5点 (9) 4点

講評

この問題を最後まで解いた人は気付いたことと思いますが、この問題は全体を通して1つの問題

2数 $\frac{n}{n+1}$, $\frac{n+1}{n}$ がともに有限小数となるような自然数 n をすべて求めよ

を考えるものです。

ただし、小問を本来の解答の流れに沿って与えるのではなく、少し順番を変えて出題しました。すなわち、本来の流れは小問番号で書くと

((7) → (8) → (9)の前半で方程式 $|2^l - 5^m| = 1$ の解を調べる問題に帰着 → [A] → (9)の結論となります。

なぜこのような配置にしたかですが、本来の解答の流れそのままに小問を作った場合、(8)から(9)の前半にかけて方程式 $|2^l - 5^m| = 1$ が導出できないと、そのあと何もできなくなってしまうので、今回はこのように小問を配置しました。また、細かく小問に分けましたが、これは1つ1つの議論をきっちりしてもらいたかったためです。

この問題は「整数問題」と呼ばれる問題です。整数問題とは整数に関する問題を総称したものであり、素数に関する問題、方程式の整数解を求める問題など、様々な問題が含まれます。整数問題を解くためのアプローチは様々ですが、今回の問題のように、解くために高度な予備知識を必要としない問題も多いです。高度な予備知識を用いない整数論のことを「初等整数論」といいます。初等整数論は高度な予備知識を使わない分、考える力が求められます。そのため、大学入試では考える力を問うのに整数問題が出題されることが多くあります。

今回の皆さんの答案を見ると、知識はあるが思考力は今一つ、という答案が多いです。皆さんには今回の問題を復習することと、これから積極的に様々な問題にチャレンジして考える力を伸ばしていくことを期待します。

問題4の平均点は10.1点でした。30点以上は出ませんでした。札幌南和田君の答案は(6)以外においてほぼ完璧な答案でした。札幌南涌井君、立命館慶祥斉藤君も自信を持って良いでしょう。

以下に各小問の講評を書いていきますが、全体として感じたことは

- ① なんとなくわかっているが、正しく説明できていない。または説明が不足している。
- ② 数学用語の使い方を間違っている。
- ③ 主張が推測で終わっており、証明がされていない。
- ④ 記述が意味不明。

といったことです。解答を書くときは、自分の考えが誤解無く他人に伝わるように留意してほしいのと、書き終わったときに「これで間違いないかな、大丈夫かな」と吟味してほしいと思います。

(1) 正解者15人 平均点0.87点

初めから正解者の少ない難問になってしまいました。1年生の受験者が多い中、 $5^0 = 1$ を知っていた受験者が多かったのは評価できますが、正しく導出できていた人は少なかったです。

多かった解答は次の通りです。

$$5^0 = 5^{1-1} = 5^1 \cdot 5^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

上の式変形には間違いはありません。しかし、これはこの問題の解答になっていません。問題の文面から求められていることを「正しく」読み取らなければ、見当違いの解答になってしまいます。

この問題で求められていることは指数の拡張です。すなわち、自然数の指数だけを使って0乗を導かなければなりません。よって、証明なしに負の指数 $5^{-1}=\frac{1}{5}$ を使うことはできないのです。（証明問題で、証明すべきことを仮定しているようなもので、全く意味がありません。）また、知識を問う問題ではないので、 $5^0=1$ だけのものには点数を与えていません。

(2) 正解者 80 人 平均点 1.78 点

説明が欠落している解答が幾つかありました。説明がくどすぎるのも良くないですが、必要な説明が欠落するのは困ります。補足を付けた意図は、 $2^l=2 \Leftrightarrow l=1$ の変形です。数学Ⅰまでの知識で $2^l=2$ を導き、その解として、 $l=1$ があることはすぐに気付かなくてははいけません。問題は $l=1$ 以外の解があるか、ということです。これについては、数学Ⅱの知識無しで考えることが困難であるため、補足を付けました。そのため、特に数学Ⅱをまだ学習していない生徒は、記述の途中に「 $2^l=2$ 」を書くことが必須だと思うのですが…。

(3) 正解者 39 人 平均点 2.02 点

ややわかりにくい問題だったと思います。[A]の問題全体を通して、 l と m は方程式の未知数や根を表していますが、この問題だけは（非負整数を取る）変数になっています。この小問の初頭に改めて「非負整数 l について」と書くべきでした。

概ねできていた人が多かったのですが、0乗について言及していないものは1点を減じてあります。また、場合分けの中で、入っていない自然数があるものも減点してあります。

(4) 正解者 56 人 平均点 1.74 点

(3)の誘導があったため、まずまずの正答率になりました。

(5) 正解者 3 人 平均点 0.2 点

(4)は(3)という誘導を付けたのに対し、(5)は自由な考えを期待して誘導は付けなかったのですが、予想以上にチャレンジが少なくて残念でした。

正解者は、釧路湖陵渡辺さん、岩見沢東石垣君、岩見沢東神内君の3人でした。また、札幌南和田君の解答もほぼ完璧でした。

完全ではないものの、興味深い別解があったので紹介します。立命館慶祥岡本君の解答です。（説明の為に一部改変してあります）

[証明]

(4)より、 l は偶数なので、ある非負整数 l' によって $l=2l'$ とでき、 $2^{2l'}=4^{l'}$ なので、方程式は $|4^{l'}-5^m|=1$ とかける。

また、二項定理によって

$$5^m=(4+1)^m=4^m+_m C_1 \cdot 4^{m-1}+_m C_2 \cdot 4^{m-2}+\dots+_m C_{m-1} \cdot 4+1=4k+1 \quad (k \text{ は整数})$$

とかけるので、 $5^m \equiv 1 \pmod{4}$ (5^m を4で割った余りは1)である。…(†)

ここで、 $4^{l'}-5^m=1$ とすると、 $5^m=4^{l'}-1 \equiv 3 \pmod{4}$ となり、(†)に反してしまう。

よって、 $4^{l'}-5^m=-1$ であり、 $4^{l'}=5^m-1$ …(‡)である。

ここで、 m を偶数と仮定すると、 5^m-1 は素因数として3を持つ。

ゆえに、明らかに(‡)を満たさないので、 m は奇数しか取り得ない。（証明終わり）

二項定理は数学Ⅱで学習します。1年生ながらよく学習していると思います。さて、この解答ですが、二重下線の主張が非自明です。この主張が正しいことが示されれば、この証明は完成します。この主張は真でしょうか偽でしょうか。これは皆さんへの宿題にしたいと思います。（真であれば証明を、偽であれば反例を挙げましょう。）

(6) 正解者 0 人 平均点 0.19 点

問題 4 の中核になる問題ですが、ほとんどチャレンジした人はいませんでした。結論だけのものはおまけで 1 点を与えています。

因みに先の(5)の別解の(‡)に、 5^m の二項展開の式を代入すると、解として取り得るのが $m < 3$ の範囲に限定されることがわかります。

ところで、(4)は 2^l や 5^m の一の位に注目して証明をしましたが、(5)において 2^l や 5^m の下三桁に注目して解答しようとした、双葉高校の板垣君の考えは特筆すべきことです。(5)の段階では、 l 、 m の条件が少なく、上手くいかないのですが、(6)の段階では状況が大きく変わっています。(6)では m を奇数としてよいわけですが、 $m \geq 3$ かつ m を奇数とすると、 5^m の下三桁は必ず 125 になるのです。これに、上の(‡)を適用すると、 4^l の下三桁は 124 にならないといけないうことになります。ここで、 4^l の下三桁が 124 にはなり得ないことを示せば、解として $m \geq 3$ は取り得ないことが分かります。証明は自分で考えてみて下さい。(手計算でも気合と根性で頑張れば 1 時間くらいで結論が出ますが…もっと良い方法があるはずです。)

(7) 正解者 111 人 平均点 2.08 点

よくできていました。過不足があるものについては 0 点としてあります。

(8) 正解者 0 人 平均点 0.84 点

なんとなくわかっている人が多いようですが、用語の使い方を間違えて正しく表現できていなかったり、なぜその条件なのか、根拠が示されていない答案が多かったです。条件を予想したら、その条件の必要性と十分性を証明せねばなりません。それを意識した答案が無く、完全な正答者はいませんでした。

(9) 正解者 0 人 平均点 0.43 点

(6)の結論を必要とするので、正解者はいませんでした。[A]の問題に正しく帰着できている人も数人程度でした。

さて、[B]の問題で、なぜ「10 進数表記とする」という注意があったかわかりましたか？10 進数以外でこの問題を考えてみればわかるかと思いますが、何進数で考えるかによって、有限小数になるものと循環小数になるものが変わってきます。例えば、 $\frac{1}{3}$ は 10 進数では循環小数ですが、12 進数で表記すると 0.4 となります。

12 進数で(8)の問題を考えると、 $k = 2^l 3^m$ (l 、 m は非負整数) の形で表されるもの、となるでしょう。では、(9)の結論はどう変わっていくのでしょうか。これは方程式 $|2^l - 3^m| = 1$ の整数解を求める問題を考えることになります。この問題は皆さんへの宿題にしましょう。

もう 1 つ宿題を出します。今回、10 進数で分数が有限小数になるには分母の素因数が 2、5 のみであることが必要十分ということで 2 と 5 という数字がたくさん出てきたわけですが、今度は 2 と 5 以外の素数で成り立つ命題を 1 つ書きます。この命題の証明を考えてみてください。

【命題】

2 と 5 以外の任意の素数は、それぞれ適当な数をかけることによって、1 が並んだ数にすることができる。

最後に、アンケートの中に「非負整数がわかりませんでした」という回答がありました。実は、私も何かの問題で初めてこの言葉を見るまで、この言葉を知りませんでしたし、当然意味も分かりませ

んでした。そのときに私は漢字の意味から類推してみました。「負に非ざる整数」すなわち、正の整数と0全体のこと、と解釈しました。結果的に合っていましたが、合つてようが合っていないかろうが、わからない言葉を類推することは重要です。そのときに間違つていても、考えたことが印象に残り、その言葉が記憶に残ると思います。関連して、英語で長文読解をやるときに知らない単語が出てくることがあるかと思いますが、そんなときには周囲から類推することが求められるはずで

す。これは単に言葉の定義に関することですが、未知なる問題に遭遇したときに、自分の持つ知識を使って問題解決に向かつていけるような、考える力をつけることが現代社会で求められています。皆さんにはこれから数学を含む様々な学習活動を通して、思考力・判断力・表現力を付け、「生きる力」を身につけていくことを期待します。頑張ってください。

(北海道札幌東豊高等学校 吉原怜次)