配点

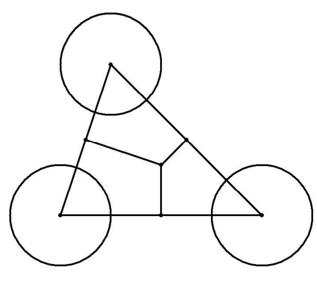
(1)，(2)，(3)，(4)　各 10 点

講評

数学コンテストではほぼ毎年平面図形の問題を出題しています。高校の数学教科書で平面図形の内容といえば数Aの「図形の性質」を思い浮かべる人が多いと思いますが，中学の内容（合同，相似，円周角，三平方の定理など）や数Ⅰの三角比，あと数Ⅱの座標平面上の図形の方程式，数Bのベクトルなどを含む場合もあります。コンテストの出題範囲は原則として数Ⅰ・数Aまでとしているので最後は二次関数や二次方程式に帰着する問題が最も作りやすいのです。この問題を見て第 30 回のコンテストで出題したマルファッチの円を思い出した人がいるかもしれません。題材が三角形と 3 つの円というところは同じだし，最初は図形の性質を使うけど最後は二次方程式を腕力勝負(!)で解くというところは似ているかもしれませんね。

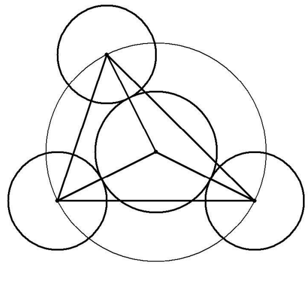
3 つの半径が異なる円すべてに外接する円の中心と半径を求める一般的な方法についてはインターネットの「アポロニウスの接触問題」で検索するといろんなサイトで見つけられると思います。興味を持たれた方は調べてみてください。

(1)は半径が同じ 3 つの円すべてに外接する円の中心の位置を作図するものでした。

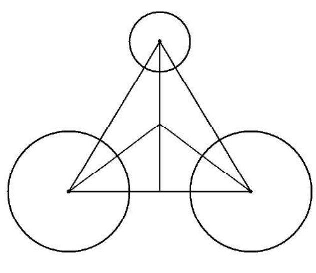


問題用紙の図をよく見ると円Dの中心は 3 点 A，B，C から等距離にあることが分かるので，求める点は三角形の外心すなわち各辺の垂直二等分線の交点であることに気が付いた人が多かったと思います。残念なのは説明なしにフリーハンドで線を引いて垂直性や中点を通っていることを確認できない答案や，補助的な線や交点を多く図の中に入れてどのようにして中心を求めているのか採点者が解釈に困った答案があったこと（定規やコンパスを利用して作図したものについては説明がなくても OK）です。減点した答案の多くはそのようなものでした。また一部に角の二等分線の交点（内心）や辺の中点と向かいの頂点とを結んだ線分（中線）の交点（重心）と混同してしまった人がいました。正三角形であれば内心，外心，重心，垂心は一致するのですが一般にはこれらの点は一致していません。(1)で満点の人は 143 名，得点率は 85.6% でした。

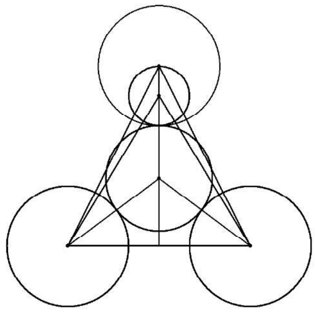
(2)は(1)の円の半径を求めるものです。三角形の 3 辺は問題文で与えられているので 3 辺の長さから余弦定理で 3 つの角いずれかの余弦（cos）を求めて，相互関係の公式を用いて正弦（sin）に直し，正弦定理で得られる外接円の半径から半径 1 を引くと求める円の半径となります。当初予想していなかった解答としては余弦定理で $\cos B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から ∠B=45°，よって ∠B の中心角 ∠ADC=90° より△ADC は直角二等辺三角形であることを利用したものなどがありました。ただし，説明不足で減点した答案もあります。(2)で満点の人は 46 名，得点率は 36.7% でした。



(3)は△ABC を BA＝BC の二等辺三角形，O_1，O_2 は半径 2 の円で，O_3 は半径 1 の円として 3 円に外接する円の半径を求める問題です。求める円の中心は 2 点A，Bから等距離，すなわち，線分AB の垂直二等分線上にあるので，求める円の中心と辺AB に引いた垂線の交点M と点B，点E についてできる直角三角形について三平方の定理を用いると求める円の半径 r についての式が作れます。(2)の場合は 3 円の半径が同じだっ



たので△ABCの外接円の半径を用いて求める円の半径を表せましたが，(3)においては円O_3の半径が異なるため求める円の中心は△ABCの外心とは一致しません。



ところが，受験者の中に円O_3の中心Cを距離1だけ辺ABの上方に移動した点をC′として，点C′中心の半径2の円を描くことによって3つの円の半径を同じにして求める円の半径を

(△ABC′の外接円の半径)-2

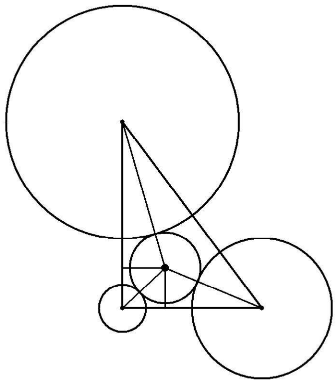
として求めた答案（旭川東富樫君）がいました。ユニークな発想に敬意を表します。(3)の満点は15名で，得点率は12.8%でした。

(4)は，△ABCは直角三角形ですが，O_1，O_2，O_3の半径が異なるため，式を作るのに苦労した人が多かったです。座標を使って式で表すと少し負担は軽くなるのですが座標平面を使って円の方程式を扱うのは数Ⅱの内容なので1年生にとっては難しかったかもしれません。

とはいえ，問題の本質は，円の半径をrとすると，点A，B，Cと求める円の中心Fとの距離は

$\mathrm{AF}=r+1$，$\mathrm{BF}=r+3$，$\mathrm{CF}=r+5$

であることです。ここで，点Fから辺ABに引いた垂線への交点をG，点Fから辺ACに引いた垂線の交点をHとして，$\mathrm{AG}=x$，$\mathrm{AH}=y$とおけば，x，y，rについての3元連立方程式になります。こちらの事前の予想ではx，yを消去してrの2次方程式までは導けても，最後の方程式



$23r^2+218r-385=(23r-35)(r+11)=0$

を解くのに難儀する人が多いのではないかと思っていたのですが，条件式からrの方程式に直す段階で変形ミス，その他で（2乗の付け忘れなど）計算を完成させせることに手間取り，結局(4)を最後まで解けた人は一人もいませんでした。最終的には(4)の答案で点をつけることができた答案は10名に満たなかったのでちょっと難しすぎたかなと思います。もうちょっとでできそうだった人は，札幌南涌井君，立命館慶祥小林さん，旭川東吉田君，旭川東山崎君の4人でした。満点は0人，得点率は1.8%でした。

解答用紙に書かれたアンケートはみんな読ませていただきました。圧倒的に「難しい」に○を付けた人が多かったのですが，コメント欄は楽しく読ませてもらいました。「（難しかったけど）がんばればいけそうだった」「自信はないけど面白かったです」と書いてくれた方には「こちらこそ採点も楽しかったです，来年もよかったら受けてくださいね」。あと「もっと図を付けてほしい」と書いてくれた方には「図形問題は自分で図を描くことによって糸口が開けることが多いです。また正しい図を描くことによって部分点がもらえることもあります。」

（北海道札幌旭丘高等学校　佐々木光憲）