着眼点

(1)　$a=5$，$p=0$，$q=1$ を代入する。

(4)　2^l や 5^m の 1 の位の数字の動きに着目する。

(5)　背理法を使う。m が偶数だと仮定して左辺を因数分解する。

(6)　2 つの場合に分けて考える。「解が多くは存在しないことを示す」スタンスで考えない と難しいかもしれない。

(8)　割り算の筆算の仕方を見直してみよう。0 をおろすとはどういうことか？
　ここに，問題に 10 進法であることが書かれている必要性がある。

(9)　今までの誘導にしたがって自然に考えれば[A]の問題に帰着できるはずである。n，$n+1$ともに 10 の倍数にはならないことに注意せよ。

解答例

(1)　指数法則 $a^pa^q=a^{p+q}$ より，$5^0\cdot5^1=5^{0+1}=5^1$ であるから，$5^0\cdot5=5$

よって，$5^0=\dfrac{5}{5}=1$

(2)　$m=0$ を代入して，$|2^l-1|=1$

$l>0$ より $2^l>1$ であるから，$2^l-1>0$

方程式(*)は $2^l-1=1$，よって，$2^l=2$ となるため，$l=1$

(3)　2^l の 1 の位の数は $l=0$ のときは 1，それ以外の場合は次のようになる

$l\equiv1 \pmod 4$ のとき　2

$l\equiv2 \pmod 4$ のとき　4

$l\equiv3 \pmod 4$ のとき　8

$l\equiv0 \pmod 4$ のとき　6

注）l と i をそれぞれ 4 で割った余りが等しいとき，「$l\equiv i \pmod 4$」と表す

(4)　方程式(*)を満たすには，2 数 2^l，5^m の 1 の位の差が 1 でなければならない

m が正の整数のとき，5^m の 1 の位の数は常に 5 である

よって，2^l の 1 の位の数は 4 か 6 である

ゆえに，$l\equiv2$ または $l\equiv0 \pmod 4$

すなわち，l は偶数である

(5)　m が偶数だと仮定すると，$m=2m'$（m' は正の整数）と書ける

(4)より，$l=2l'$（l' は正の整数）と書けるから，方程式(*)は

$$|2^{2l'}-5^{2m'}|=1$$

と書ける

左辺を因数分解すると

$$|2^{l'}+5^{m'}|\cdot|2^{l'}-5^{m'}|=1$$

となる

2 数 $2^{l'}+5^{m'}$，$2^{l'}-5^{m'}$ はともに整数であるため，方程式を満たすにはそれぞれの絶対値が 1 でなければならないが，$2^{l'}\geqq2$，$5^{m'}\geqq5$ より，$|2^{l'}+5^{m'}|>1$ となってしまう

よって，方程式を満たさない

ゆえに，m は奇数である

[別解]　$2^l-5^m\equiv(-1)^l-(-1)^m \pmod 3$ であり，$|2^l-5^m|=1$ であることから，

$$2^l-5^m\equiv 0 \pmod 3$$ とはならない

それゆえ，l と m の偶奇は異ならなければならず，(4)より，l は偶数であるため，m は奇数である

(6)　これまでの議論より $l=2l'$，$m=2m'+1$（l' は正の整数，m' は非負整数）と書ける

方程式(*)は

$$|2^{2l'}-5^{2m'+1}|=1 \quad (l' \text{は正の整数，} m' \text{は非負整数})$$

となる

これを 2 つの場合に分けて考える

（i）$2^{2l'}-5^{2m'+1}>0$ のとき

方程式(*)は，$2^{2l'}-5^{2m'+1}=1$ となる

この場合，解が存在しないことを示す

移項して因数分解すると

$$5^{2m'+1}=2^{2l'}-1=(2^{l'}+1)(2^{l'}-1)$$

となる

2 数 $2^{l'}+1$，$2^{l'}-1$ は正の整数なので，ともに 5 のべき乗でなければならない

しかし，この 2 数の差は 2 なので，少なくとも片方は 5 の倍数ではない

したがって，片方の数は 1 でなければならない

$2^{l'}+1$ は 1 になり得ないので，$2^{l'}-1=1$ である

このとき，$l'=1$ であるが，$2^{l'}+1=3$ となり，5 の倍数にならない

以上より，解が存在しないことが示された

（ii）$2^{2l'}-5^{2m'+1}<0$ のとき

方程式(*)は，$2^{2l'}-5^{2m'+1}=-1$，すなわち $2^{2l'}=5^{2m'+1}-1$ となる

この式の右辺を因数分解すると

$$\begin{aligned}&(5-1)(5^{2m'}+5^{2m'-1}+5^{2m'-2}+\cdots+5^2+5+1)\\&=4(5^{2m'}+5^{2m'-1}+5^{2m'-2}+\cdots+5^2+5+1)\end{aligned}$$

となる

よって，$5^{2m'}+5^{2m'-1}+5^{2m'-2}+\cdots+5^2+5+1$ は 4 のべき乗である

一方で，この数の 1 の位を調べると，5^k（$1\leqq k\leqq 2m'$）の 1 の位は 5 のため,この数の 1 の位は，$5+5+5+\cdots+5+1=5\cdot 2m'+1=10m'+1$ の 1 の位の数であるから 1である

よって，この数は 4 の倍数で はない

したがって 1 である

以上より

$$2^{2l'}=5^{2m'+1}-1=4\cdot 1=4$$

であるから，$l'=1$，$m'=0$，すなわち $(l,\ m)=(2,\ 1)$ である

（i），（ii）より求める解は $(l,\ m)=(2,\ 1)$ のみである

[別解]　$l\geqq 3$ のとき，

$$2^l-5^m\equiv -5^m\equiv\begin{cases}3 & (m \text{ が奇数})\\ -1 & (m \text{ が偶数})\end{cases} \pmod 8$$

$|2^l-5^m|=1$ であるから，$2^l-5^m\equiv 3 \pmod 8$ は成り立たないので m は偶数であるが，こ

れは(5)に反する

よって，$l \geqq 3$ では解は存在し得ない

$l=2$ のとき　$|2^l-5^m|=|4-5^m|=1$ より，$m=1$

$l=1$ のとき　$|2^l-5^m|=|2-5^m|=1$ より,これを満たす正の整数 m は存在しない

$l=0$ のとき　$|2^l-5^m|=|1-5^m|=1$ より,これを満たす整数 m は存在しない

以上より，求める解は $(l,\ m)=(2,\ 1)$ のみである

(7)　求める k は 2，4，5，8 である

（ちなみに，$\dfrac{1}{2}=0.5$，$\dfrac{1}{3}=0.\dot{3}$，$\dfrac{1}{4}=0.25$，$\dfrac{1}{5}=0.2$，$\dfrac{1}{6}=0.1\dot{6}$，$\dfrac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$，$\dfrac{1}{8}=0.125$，$\dfrac{1}{9}=0.\dot{1}$）

(8)　自然数 k に対して $\dfrac{1}{k}$ が有限小数になるための条件は

$$k=2^a5^b\ （a,\ b \text{ はともに非負整数}）$$

と書けることである

k がこの形で書ければ，$c=\max\{a,\ b\}$ とするとき，k は 10^c の約数である

よって，$\dfrac{10^c}{k}=k'$（k' は自然数）であり，$\dfrac{1}{10^c}$ は有限小数だから，$\dfrac{1}{k}=k'\times\dfrac{1}{10^c}$ も有限小数

一方，任意の自然数 c' に対して，$10^{c'}$ は 2，5 以外の因数を持たないから，k が 2，5 以外の因数を持つとき，$1\div k$ は割り切れない

すなわち，$\dfrac{1}{k}$ は有限小数にはならない

(9)　$\dfrac{n}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$，$\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}$ なので，2 数 $\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n+1}$ がともに有限小数となる自然数 n を求めればよい

(8)より，ある非負整数 l_1，l_2，m_1，m_2 を使って

$$n=2^{l_1}5^{m_1},\ n+1=2^{l_2}5^{m_2}$$

と書ければよいが，l_1，m_1 ともに正とすると，$n+1=2^{l_1}5^{m_1}+1$ は 2 の倍数でも 5 の倍数でもないので，$n+1=2^{l_2}5^{m_2}$ を満たす l_2，m_2 は存在しない

よって，l_1，m_1 の少なくとも片方は 0 である

同様に，l_2，m_2 の少なくとも片方は 0 である

したがって

（ｉ）　$n=2^l$，$n+1=5^m$（l，m は非負整数）

（ⅱ）　$n=5^m$，$n+1=2^l$（l，m は非負整数）

のどちらかである。

（ｉ)の場合　$5^m-2^l=(n+1)-n=1$ である

これまでの議論から，この解は $(l,\ m)=(2,\ 1)$ に限る

このとき，$n=2^2=4$

（ⅱ)の場合　$2^l-5^m=(n+1)-n=1$ である

これまでの議論から，この解は $(l,\ m)=(1,\ 0)$ に限る

　　　　　　このとき，$n=5^0=1$

以上より，求める n は 1 と 4 である