着眼点

「平面上で3つの互いに共有点を持たず，中心が他の円の内部にない円があるとき，3円にすべて接する円を描け」という問題をアポロニウスの接触問題というそうです。実はそのような円はそれぞれ内接，外接を考えると8種類できます。アポロニウスの円といえば数Ⅱの軌跡の教科書でも必ず出てくる名前ですがこの問題についても中世から近世にかけていろいろ研究されてきました。3つの円の半径が等しい場合は易しいのですが，半径が異なる場合は求める円の中心が2点からの距離の差が一定である曲線（双曲線：高校数学では数Ⅲで出てきます）の上にあるため，一般の場合の中心の位置や半径を求めるのはかなり難しいです。中世以降多くの数学者が一般の解法について研究しました。最終的には定規とコンパスだけを使った作図法が発見されていますが，当時の人にとっても現代人にとっても結構手ごわい問題だと思います。

しかし，デカルト以降座標平面における図形の方程式を用いて，方程式を解くことによって円の中心の位置や半径を求めることができるようになりました。今回の出題は，(1)(2)は平面図形の性質で，(3)以降は計算で半径を求めてもらおうという狙いです。ただし，計算が膨大になる恐れがあるため今回は特別な場合として，図形を，(3)では二等辺三角形の場合，(4)では直角三角形の場合で作成しました。

(1)　半径が等しい3つの円すべてに接する円を求めます。この場合求める円の中心は3点A，B，Cからの距離が等しいため三角形の外心であることに気が付けば易しいでしょう。

(2)　求める円の半径ですが，(外接円の半径)－(3つの等円の半径)なので，正弦定理を使えばこれも易しいでしょう。

(3)　△ABCはBC＝CA の二等辺三角形で，しかも，O_1，O_2 の半径が等しいので，求める円の中心は辺ABの垂直二等分線上にあり，三平方の定理で求められます。

(4)　一般には3つの円の半径が異なる場合の計算は大変ですが，△ABCが直角三角形だと数Ⅰの範囲で式は立てられます。ただし，計算量が多いので式を作るのもけっこう大変だと思います。数Ⅱ既習者は座標を使って計算してもＯＫです。最終的には2次方程式を解きます。たすきがけで因数分解できるのですがそのことに気が付かないと解の公式を使うことになります。

解答例

(1)　円と円が外接するとき中心間の距離が２つの円の半径の和と等しいことに注意する。

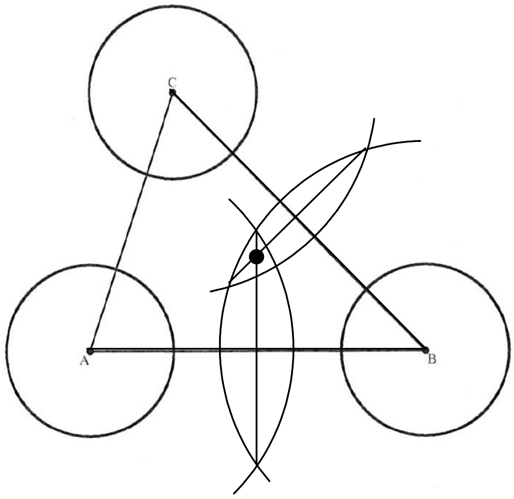
　求める円Dの中心を点D，半径をrとすると，DA＝DB＝DC＝r＋1 が成り立つので，点D は△ABC の外心である。よって，辺ABの垂直二等分線，BCの垂直二等分線，CAの垂直二等分線のうち2本を作図し，2線の交点をDとするとよい。（3辺の垂直二等分線は1点で交わるので，2辺の垂直二等分線の交点として作図しても大丈夫です）。

〈作図例〉

① 辺ABの両端A，Bからコンパスを用いて両端から等距離である2点をとり，2点を結んで辺ABの垂直二等分線を描く

② 辺BCについても同様にして辺BCの垂直二等分線を描く

③ 2本の垂直二等分線の交点を点Dとする



(2) 円Dの中心をそのままに半径を$r+1$とすると△ABCの外接円になるので，外接円半径を求めるために正弦定理を使います。

△ABCについて余弦定理より

$$\cos A=\frac{4^2+(\sqrt{10})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{10}}$$

$$=\frac{8}{8\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

相互関係の公式と，$0°<A<180°$ より $\sin A>0$ であることから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

△ABCの外接円の半径をRとすると，正弦定理より

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin A}=2R \qquad \text{よって，} R=\frac{3\sqrt{2}}{2\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}}=\sqrt{5}$$

よって，求める円の半径は $\sqrt{5}-1$

（参考）数Ⅱの座標平面の考え方を用いるのであれば点A，点B，点Cの座標をそれぞれ(0，0)，(4，0)，(1，3)とおくとよいでしょう。

(3) △ABCはCA＝CB＝$\sqrt{34}$の二等辺三角形であり，求める円Eの中心をE，半径をrとすると，中心間の距離を考えると，EA＝EB＝$r+2$，EC＝$r+1$となる

よって，点Eは2点A，Bから等距離にあるので，点Eは辺ABの垂直二等分線上にある

また，点Cも辺ABの垂直二等分線上にあるので，線分ABの中点をMとすると，AM＝BM＝3で，△AMC，△AMEはともに直角三角形である

EA＝EB＝$r+2$，EC＝$r+1$を用いると，△AMCにおいて

$$\mathrm{CM}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-3^2}=5$$

EM＝CM－EC＝$5-(r+1)=4-r$より，△AMEにおいて

$$(r+2)^2=(4-r)^2+3^2 \qquad \text{これを解いて}\quad r=\frac{7}{4}$$

（参考）この問題を座標平面を用いて考える場合は点A，点B，点Cの座標をそれぞれ(0，0)，(6，0)，(3，5)とおくとよいでしょう。

(4) △ABCが∠A＝90°の直角三角形であることに注意する

求める円の中心をF，半径をrとすると，2円の中心間距離よりFA＝$r+1$，FB＝$r+3$，FC＝$r+5$である

点Fから辺ABにおろした垂線と辺ABの交点をGとして，線分AGの長さをxとおく

点Fから辺ACにおろした垂線と辺ACの交点をHとして，線分AHの長さをyとおく

すると，$GB=6-x$，$HC=8-y$ となるので，三平方の定理より

$$FA^2=x^2+y^2,\quad FB^2=(6-x)^2+y^2,\quad FC^2=x^2+(8-y)^2$$

よって,

$$x^2+y^2=(r+1)^2 \quad \cdots①$$

$$(6-x)^2+y^2=(r+3)^2 \quad \cdots②$$

$$x^2+(8-y)^2=(r+5)^2 \quad \cdots③$$

①−②より，$12x-36=-4r-8$　　よって，$x=\dfrac{7-r}{3}$

①−③より，$16y-64=-8r-24$　　よって，$y=\dfrac{5-r}{2}$

これらを①に代入して　$\left(\dfrac{7-r}{3}\right)^2+\left(\dfrac{5-r}{2}\right)^2=(r+1)^2$

分母を払って整理すると　$23r^2+218r-385=0$

$$(r+11)(23r-35)=0$$

$r>0$ より　$r=\dfrac{35}{23}$

（参考）この問題を座標平面を用いて考える場合は点A，点B，点C の座標をそれぞれ(0，0)，(6，0)，(0，8) とおくとよいでしょう。