

問題 3

s, t は実数として、関数 $f(x)$ は次の性質を満たす。

$$f(s+t) = f(s) + f(t) \quad \dots \textcircled{1}$$

- (1) $f(0)$ の値を求めなさい。
- (2) $f(3), f(-2), f\left(\frac{2}{3}\right)$ を $f(1)$ を用いて表しなさい。
- (3) r を有理数とすると、 $f(r)$ を $f(1), r$ を用いて表しなさい。(解答のみでよい)

さらに、関数 $f(x)$ は、すべての実数 s, t に対して次の性質も満たすとする。

$$f(s \cdot t) = f(s) \cdot f(t) \quad \dots \textcircled{2}$$

- (4) $f(1)$ と $f(\sqrt{6})$ のとりうる値をすべて答えなさい。
- (5) $f(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ のとりうる値をすべて答えなさい。
- (6) (5)の値のうち 2 番目に小さいものを m 、そのときの関数を $f_2(x)$ とする (つまり、 $f_2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = m$ となる) とき、 $f_2(\sqrt{2})$ の値を求めなさい。