$\boxed{\text{配点}}$ (1) 10 点　(2) 10 点　(3) 8 点　(4) 8 点　(5) 4 点

$\boxed{\text{講評}}$

今年の問題２は立体図形の問題です。題材は立方体に内接する球，正四面体に内接する球などベースになるのは中学や高校の教科書にある基本事項であり，そんなに難しくはないだろうと考えたのですが出来は予想に反してあまりよくありませんでした。これまであまり立体について時間をかけて学習していなかったのでしょうか。

特に立方体と球に関する(1)，(2)は予想外の不出来でした。ただし，図について出題者側の説明不足から，勘違いをしたのではないかと思われる答案もありました。

立体図形を扱う難しさの一つは平面と球が交わるとか接するなどの図形の位置関係が 3 次元なので把握しづらいことがあると思います。今回の例でいえば，(1)の立方体に内接する球が接しているのは平面のどこの点であるかとか，同じく(4)の球が四面体に内接しているのはどこの点かなどについて，つい平面図形の内接などと同じに考えてしまった人が多かったように思います。また，立体の場合，断面の切り方によっても変わるので気を付けてほしいと思います。

(1)ですが，球の半径については一辺の長さ $2a$ の正方形に内接する円と同じで半径 $a$ となります。内接と外接を取り違えた人や立方体からはみだす球を考えてしまった人が少数いましたが，半径はおおむねできていました。ただし，球の体積の公式を間違った人もいました。これはしっかり覚えておいて欲しいです。

断面図については解答用紙の図形（長方形）に直接描きこんでもらうつもりで出題したのですが，図に点の名前をいれていなかったため，解答用紙の長方形を単なる枠だと思って，枠の中に新たに図形ACGE を描いた人が多かったのです。それでも構わないのですが，ここで予想しなかったことが起きました。図形ACGE を正方形として描いてしまった人が意外に多かったことです。AE やCG は長さが $2a$ で，AC やGE は立方体の面（正方形）の対角線ですから，長さは $2\sqrt{2}\,a$ となるので，断面は長方形になります。長方形と球の切り口でできる円は辺AC とは接していますが，AE，CG とは接していません。内接する球と立方体の表面との接点は面の対角線交点（面の中央部）です。

このことは(2)でも使うのでもう少し解説します。立方体ABCD－EFGHの各面（正方形）の辺の長さは $2a$ ですが，各面の正方形の対角線（例えば，AC やGE ）は $2\sqrt{2}\,a$，上面の点A と下面の点G を結ぶ線分（立方体の対角線）の長さは△ACGに関する三平方の定理により $2\sqrt{3}\,a$ です。

実はこの $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ の関係は(2)の立方体に内接し互いに外接する二つの球の場合も成り立ちます。
作図については，まず中心がしっかり示されていること

① 長方形ACGE のAC とGE の中点を結んだ線分とAE とCG の中点を結んだ線分の交点
② 長方形ACGE のAC とGE の中点を結んだ線分の中点（AE とCG の中点を結んだ線分でも同じ）
③ 長方形ACGE の対角線の交点（互いに 2 等分するので中点になっている）

のいずれかによって中心を作図することが大事です。

①と②の場合は中点のとり方が作図（または説明）によって示されていないものは減点しています。（③の場合は対角線を引けばよいので一番楽かも？）

球は半径 $a$ なので，AC 及びEG とは接していますが，AE 及びCG には接していません。

ちなみに(1)の得点率は 77.6%，満点は 134 名でした。

(2)は立方体に内接し互いに外接する 2 つの球ですが，(1)の説明にもあるように立方体の対角線上に 2 つの球の中心があり球どうしが接しています。中には球の半径が等しい場合のみ考えていた人もいましたが，等しくなくても内接する 2 つの球ができます。

図については本来であれば

① 2つの球の中心がいずれも対角線上にあること

② 球と球が接していること

③ 球の断面である円はAE及びCGとは接していない

の3点を満たしていることが必要ですが，全部満たしている答案は非常に少なかったので，3つのうちのいくつか満たしている答案についても部分点は与えました。

図がしっかり描けていれば球の半径も求められるのですが，球が辺AE，CGと接するという条件で考えたのでは外接になりません。なお，この球の中心がACGEの対角線上にあるというのは立方体以外では成り立たないので要注意です。

⑵の得点率は13.0%，満点（及びそれに準ずる人）は6名でした。

⑶は正四面体に内接する球の半径を求める問題です。これも球は各面（正三角形）の重心（正三角形の場合，重心，内心，外心，垂心は一致）において接するので，断面AMDにおいて球の切り口の円は辺AMとMDとは接していますが辺ADとは接していません。

この場合も内接球の中心は

① 点Aから線分MDに引いた垂線の足を$G_1$，点Dから線分AMに引いた垂線の足を$G_2$として，線分$AG_1$と線分$DG_2$の交点にある

② 球の切り口の円は線分DMと点$G_1$において接し，線分MAと点$G_2$において接する。

③ 球は辺ADとは接していない。

の3条件を満たしていることが必要です。このことから直角三角形の相似を用いて内接球の半径を求めたのが解答のやり方です。多くの教科書等でも見られる方法ですが，この方法で正解に達した答案は数名しかいませんでした。

また，正四面体の重心の考え方を用いて球の中心が線分$AG_1$を3：1に内分する点であることを用いた答案もありました。正解に至った答案は「(各面の面積の和)×内接球の半径×$\frac{1}{3}$＝正四面体の体積」を用いたものがもっとも多かったです（解答例では別解として載せてあります）。

公式を覚えていたらあてはめてもいいのですが，この問題では正四面体の一辺の長さを$2a$としているのでそのままでは使えません。

⑶の得点率は27.5%，満点及びほぼ満点は31名でした。

⑷は正四面体を辺の中点2つと頂点で切り取って作られる四面体に内接する球の体積です。断面図を用いて相似条件とメネラウスの定理（チェバの定理でも可能？）を使って解いたのが解答の方法ですが，⑶で述べた表面積と体積を用いた方法で解いた人がほとんどでした。分母が根号の和の形になっているので分母の有理化をした方がいいでしょう。この場合も側面の3平面に球が接することから中心は点Aから元の正四面体の底面に引いた垂線上にあります。

⑷の得点率は6.3%，満点及びほぼ満点は11名でした。

⑸は⑷の四面体の外接球の中心です。この場合側面の三角形が一辺の長さが$a$の正三角形と一辺の長さが$2a$の正三角形を二等分した直角三角形であることを使うと意外に簡単に外接球の中心を決定することができ，半径も非常にきれいな数値で求めることができたのですが，時間不足か最後まで到達したのはわずか1名でした。

⑸の得点率は0.21%，満点の人は1人だけでした。

（北海道札幌旭丘高等学校　佐々木光憲）