配点 (1)(i) 3 点(ii)3 点 (2)(i)3 点(ii)6 点 (3)(i)10 点(ii)15 点

講評 この問題は難しい理論や複雑な計算，裏ワザの公式などは必要としません。とにかく考える問題です。得点は予想よりかなり高くなりました。

(1)および(2)の(i)についてはほとんどの人ができていました。(2)の(ii)でうっかりミスをする人は何人かいたみたいです。

(3)の(i)については私が思っていた以上によくできていました。答えだけではなく，どのように考えたのかまで詳しく説明の文を書いてくれた人もいます。

正解のほとんどは右の表 1（解答例にあげたもの）のように得点が順に 2，2，2，4，4，4，6，6，6 となるものを見つけていました（もちろん○×の位置についてはこれ以外にもいろいろなパターンがあります）。

次に多かったのは右の表 2 のように得点が順に 0,2,4,4,4,4,6,6,6 となるもの，少数派としては右の表 3 のように得点が順に 2，2,2,2,4,6,6,6,6 となるものです。これ以外の正解は答案の中には見当たりませんでしたが他にもあるかもしれません。どなたか研究してみてくれませんか。

(3)の(ii)については正解にたどり着いたものはそんなに多くはありませんでした。白紙の解答も目立ちました。ただ，各得点は0,2,4,6 点しかありえないことはほとんどの人が気づいていたようです。

正解，または惜しいところまでいった答案を見ると，次のことを利用して導き出そうという答案が多かったようです。

① 得点の合計$\dfrac{n(n-1)}{2}$が 2 の倍数でなければならないことから $n(n-1)$が 4 の倍数であるということを利用してアプローチする方法。

② 何らかの方法で以下の 3 点を導き出してアプローチする方法。

・A_1～A_3 の得点の合計は 6 点である。

表1 (3)(i)の解答例①

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	得点
A_1		○	×	○	×	×	×	×	×	2
A_2	×		○	×	○	×	×	×	×	2
A_3	○	×		×	×	○	×	×	×	2
A_4	×	○	○		○	×	○	×	×	4
A_5	○	×	○	×		○	×	○	×	4
A_6	○	○	×	○	×		×	×	○	4
A_7	○	○	○	×	○	○		○	×	6
A_8	○	○	○	○	×	○	×		○	6
A_9	○	○	○	○	○	×	○	×		6

表２ (3)(i)の解答例②

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	得点
A_1		×	×	×	×	×	×	×	×	0
A_2	○		×	×	○	×	×	×	×	2
A_3	○	○		○	×	○	×	×	×	4
A_4	○	○	×		○	○	×	×	×	4
A_5	○	×	○	×		×	○	○	×	4
A_6	○	○	×	×	○		×	×	○	4
A_7	○	○	○	○	×	○		○	×	6
A_8	○	○	○	○	×	○	×		○	6
A_9	○	○	○	○	○	×	○	×		6

表３ (3)(i)の解答例③

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	得点
A_1		○	×	○	×	×	×	×	×	2
A_2	×		○	×	○	×	×	×	×	2
A_3	○	×		○	×	×	×	×	×	2
A_4	×	○	×		×	○	×	×	×	2
A_5	○	×	○	○		×	○	×	×	4
A_6	○	○	○	×	○		○	○	×	6
A_7	○	○	○	○	×	×		○	○	6
A_8	○	○	○	○	○	×	×		○	6
A_9	○	○	○	○	○	○	×	×		6

・A_4～A_6の得点の合計は 12 点である。

・A_7 以降の得点は 6 点である。

(3)の(ii)についてさらに言えば，解答例にあげた私の解答よりもすっきりした正解を書いてくれた人も何人かいました。その解答を整理して紹介します。

［証明］対戦表を右図のように 4 つに分割する。

	A_1 ～ A_3	A_4 ～ A_n
A_1 ～ A_3	【あ】	【い】
A_4 ～ A_n	【う】	【え】

まず，

【あ】における○の数

$=A_1$～A_3 内での対戦数$={}_3C_2=3$

である。また，条件②～④より

【い】における○の数

=【あ】における○の数$=3$

である。

次に，i 行 j 列の○×と，j 行 i 列の○×は逆転することから，

【う】における○の数

=【い】における×の数$=3(n-3)-3=3n-12$

である。また，条件⑤より，

【え】における○の数

=【う】における○の数$=3n-12$

である。これらの和は対戦表の○の総数であり，

$$\text{対戦表の○の総数}=\text{すべての対戦数}={}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$$

であるから，

$$3+3+(3n-12)+(3n-12)=\frac{n(n-1)}{2}$$

となる。これを解いて $n=4,9$ であるが，$n=4$は不可能(解答例参照)。

したがって条件①～⑤をみたすものは $n=9$ のみである。(証明終わり)

要するに解答例で$a_1+a_2+a_3$の値が6であることに気がつけばすっきりするということです(こんなことにも気づかなかった私．．．)。もちろんかなりごちゃごちゃした解答でも論理的に正しく導き出せれば正解です。むしろごちゃごちゃ考えることの方がずっと楽しいと思います(ちょっとした言い訳)。

今回も皆さんの発想を面白く読ませていただきました。数学的な発想や考え方のよさを味わうことができましたか。この問題に限らずいろいろな問題に興味を持って取り組んでみてくださいね。

(札幌静修高等学校　杉本幸司)