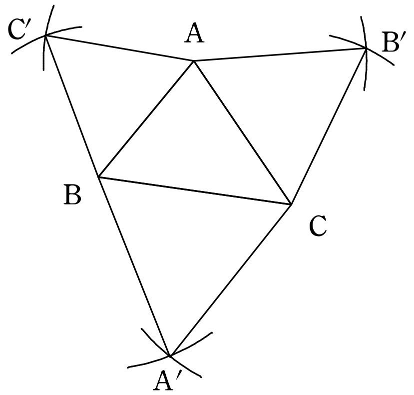
解答例

(1)　A′ の作図：B を中心に半径 BC の円弧を描き，C を中心に同じ半径の円弧を描く。2 つの円弧の 2 交点のうち，直線 BCに関して A 側にない方の交点が A′ である

他も同様である



(2)　四角形 FBA′C は円 P に内接するから

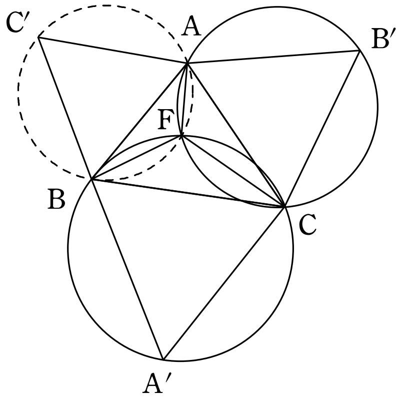
$$\angle BFC + \angle BA'C = 180^\circ$$

$\angle BA'C = 60^\circ$ であるから，$\angle BFC = 120^\circ$

同様に，四角形 FCB′A は円 Q に内接するから

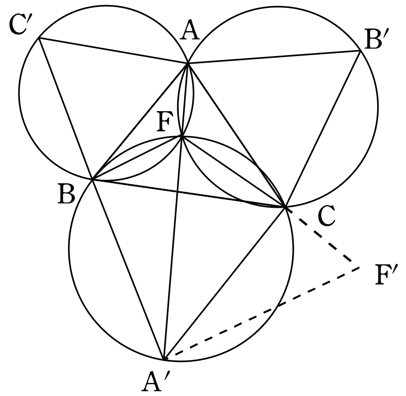
$$\angle AFC + \angle AB'C = 180^\circ$$

$\angle AB'C = 60^\circ$ であるから，$\angle AFC = 120^\circ$



(3)　(2)から，$\angle AFB = 360^\circ - 2 \times 120^\circ = 120^\circ$

よって，$\angle AC'B = 60^\circ$ であったから，四角形 FAC′B は円 R に内接する。ゆえに，3 円 P，Q，R は 1 点 F で交わる



(4)　(2)から　$\angle AFC = 120^\circ$

$$\angle A'FC = \angle A'BC = 60^\circ \quad \text{（円周角）}$$

ゆえに，3 点 A，F，A′ は一直線上にある

同様に，3 点 B，F，B′ も，3 点 C，F，C′ も一直線上にあるので，線分 AA′，BB′，CC′ は F で交わる

また，三角形 FBA′ を A′ を中心に回転して，辺 BA′ が辺 CA′ に重なるようにし，F が回転して移った点を F′ とする

$\angle A'BF + \angle A'CF = 180^\circ$ より，$\angle A'CF + \angle A'CF' = 180^\circ$

よって，3 点 F，C，F′ は一直線上にある

$\angle A'FC = \angle A'BC = 60^\circ$，$\angle A'F'C = \angle A'FB = \angle A'CB = 60^\circ$，$\angle FA'F' = \angle BA'C = 60^\circ$ より，三角形 FA′F′ は正三角形である

ゆえに，辺の長さについて，$FF' = FA'$，すなわち

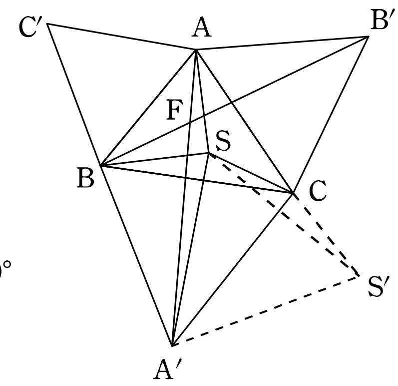
$$AA' = AF + FA' = AF + BF + CF$$

が成り立つ。同様に，$BB' = CC' = AF + BF + CF$ となり，

$$AA' = BB' = CC'$$

が成り立つ

(5)　点 S について，S は F と異なる点だから，$\angle$ASB，$\angle$BSC，$\angle$CSA のうちいずれかは 120° より大きい角となる



いま，$\angle \mathrm{BSC} > 120°$ であるとする

三角形 SBA′ を A′ を中心に回転して，辺 BA′ が辺 CA′ に重なるようにする

そのとき，S が回転して移った点を S′ とすると

$$\angle \mathrm{SCS'} = \angle \mathrm{A'CS} + \angle \mathrm{A'CS'} = \angle \mathrm{A'CS} + \angle \mathrm{A'BS} < 180°$$

であり，三角形 SA′S′ は，$\mathrm{SA'} = \mathrm{S'A'}$，$\angle \mathrm{SA'S'} = 60°$ なので，正三角形である

ゆえに，$\mathrm{SS'} = \mathrm{SA'}$ である

よって，$\mathrm{AS} + \mathrm{BS} + \mathrm{CS} = \mathrm{AS} + \mathrm{SC} + \mathrm{CS'} > \mathrm{AS} + \mathrm{SS'} = \mathrm{AS} + \mathrm{SA'} \geqq \mathrm{AA'}$

すなわち，$\mathrm{AS} + \mathrm{BS} + \mathrm{CS} > \mathrm{AF} + \mathrm{BF} + \mathrm{CF}$

同様に，$\angle \mathrm{ASC} > 120°$ ならば，$\mathrm{AS} + \mathrm{BS} + \mathrm{CS} > \mathrm{BB'}$ がいえ，$\angle \mathrm{ASB} > 120°$ ならば，$\mathrm{AS} + \mathrm{BS} + \mathrm{CS} > \mathrm{CC'}$ がいえる