$\boxed{\text{解答例}}$

(1)　$a=x^2-4>0$ より　$(x+2)(x-2)>0$

$$x<-2,\ 2<x$$

$b=4x+4>0$ より　　$x>-2$

$c=x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$ であるから，$c>0$ はすべての実数 x について成り立つ

よって，$a>0$，$b>0$，$c>0$ を同時に満たす x の範囲は　$x>2$

(2)　$x>2$ のとき　　$c-a=2x+8>0$

$$c-b=x^2-2x=x(x-2)>0$$

よって，$c>a$ かつ $c>b$ であるから，a，b，c でもっとも大きいのは c である

(3)　a，b，c が三角形の３辺となるための条件は，２辺の和が他の１辺より長いことである

(2)より c が最大辺となるので，$a+b>c$ を満たす x の値の範囲を求めればよい

すなわち　$(x^2-4)+(4x+4)>x^2+2x+4$

よって，求める x の値の範囲は　　$x>2$

(4)　(2)より $a\neq c$，$b\neq c$ であるから，３辺の長さが a，b，c の三角形が二等辺三角形となるのは $a=b$のときに限られる

$x^2-4=4x+4$ より　　$x^2-4x-8=0$

$$x=2\pm2\sqrt{3}$$

(3)より $x>2$ であるから　　$x=2+2\sqrt{3}$

(5)　c が最大辺であることから，c の対角を C とすると，角 C が最大角となる

３辺の長さが a，b，c の三角形に余弦定理を用いると

$$\cos C=\frac{(x^2-4)^2+(4x+4)^2-(x^2+2x+4)^2}{2(x^2-4)(4x+4)}$$

$$=\frac{-4(x^2-4)(x+1)}{8(x^2-4)(x+1)}=-\frac{1}{2}$$

$0°<C<180°$ より　　$C=120°$

よって，最大角は $120°$ である

(6)　$S=\dfrac{1}{2}(x^2-4)(4x+4)\sin 120°=\sqrt{3}(x-2)(x+2)(x+1)$

(7)　３辺の長さが a，b，c の三角形に正弦定理を用いると

$$\frac{x^2+2x+4}{\sin 120°}=2R \qquad \text{よって}\quad R=\frac{x^2+2x+4}{\sqrt{3}}$$

次に，$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$が成り立つので

$$\sqrt{3}(x-2)(x+2)(x+1)=\frac{1}{2}r(x^2-4+4x+4+x^2+2x+4)$$

$$\sqrt{3}(x-2)(x+2)(x+1)=r(x+2)(x+1)$$

$x>2$ より，$x+1\neq0$，$x+2\neq0$ であるから　　$r=\sqrt{3}(x-2)$

(8)　$R>0$，$r>0$ であるから，$k>0$

$R=kr$ より　　$\dfrac{x^2+2x+4}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}k(x-2)$　…(＊)

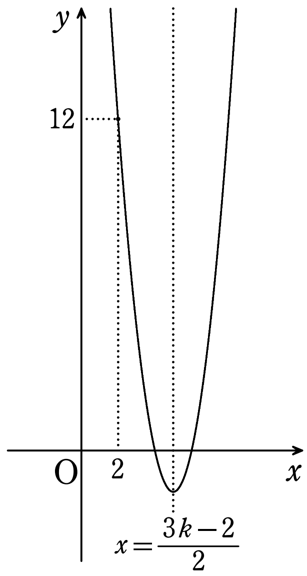
整理すると　　$x^2-(3k-2)x+6k+4=0$　…①

したがって，方程式①が $x>2$ の範囲で実数解をもてばよい

$y=f(x)=x^2-(3k-2)x+6k+4$ とおく

$f(2)=12>0$ であり，放物線 $y=f(x)$ の軸の方程式が $x=\dfrac{3k-2}{2}$ であるから，方程式 $f(x)=0$ が $x>2$ の範囲で実数解をもつならば

$$\frac{3k-2}{2}>2 \quad \text{かつ} \quad f(x)=0 \text{ の判別式 } D\geqq 0 \text{ である}$$



$\dfrac{3k-2}{2}>2$ より　　$k>2$　…②

$D\geqq 0$ より　　$D=(3k-2)^2-4(6k+4)=9k^2-36k-12\geqq 0$

$$k\leqq\frac{6-4\sqrt{3}}{3},\quad \frac{6+4\sqrt{3}}{3}\leqq k \quad \cdots③$$

よって，②かつ③より　　$k\geqq\dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}$

ゆえに，k の最小値は $\dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}$

このとき，$D=0$ となるので，方程式①は重解をもつことになるので

$$x=\frac{3k-2}{2}=\frac{3\cdot\dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}-2}{2}=2+2\sqrt{3}$$

［別解］　$(*)$より　$k=\dfrac{x^2+2x+4}{3(x-2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{12}{x-2}+x+4\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{12}{x-2}+x-2+6\right)$

$x>2$ であるから，$\dfrac{12}{x-2}>0$，$x-2>0$

相加平均と相乗平均の関係より

$$k\geqq\frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{12}{x-2}(x-2)}+6\right)=\frac{4\sqrt{3}+6}{3}$$

等号が成り立つのは $\dfrac{12}{x-2}=x-2$ のときだから，$x=2\pm2\sqrt{3}$

$x>2$ であるから，$x=2+2\sqrt{3}$

ゆえに，k の最小値は $\dfrac{4\sqrt{3}+6}{3}$，そのときの x の値は $x=2+2\sqrt{3}$