解答例

(1)　立方体は内接する球と各面（正方形）の対角線の中点（交点）で接していて，球の中心は向かい合う面どうしの接点を結ぶ線分の中点になっている

球の中心は平面で切って出来る長方形ACGE の対角線AG とCE の交点とも一致するので，球の中心は平面ACGE 上にある

球の半径は a であり，体積は $\dfrac{4}{3}\pi a^3$ である

※作図についてのポイント

切り口は円である（球を平面で切ったときの切り口は必ず円になる）

辺AC，辺GE の中点で円と接していて中心は接点を結ぶ線分の中点

球の切り口は円で，辺AC，辺GE とは接しているが，辺AE，辺CG とは接していない

※作図例

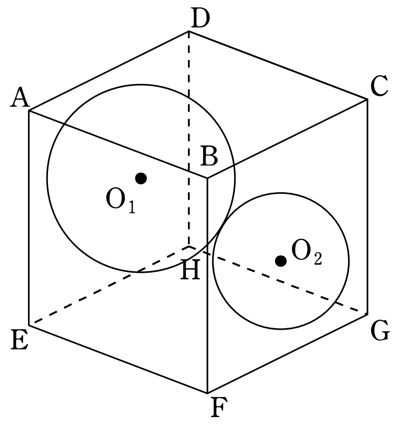
①コンパスで辺AC の垂直二等分線を作図する要領で辺AC の中点を作図する。同様に，辺GE の中点を作図する

②辺AC，辺GE の中点をそれぞれS，T として，線分STの中点を作図し点Oとする

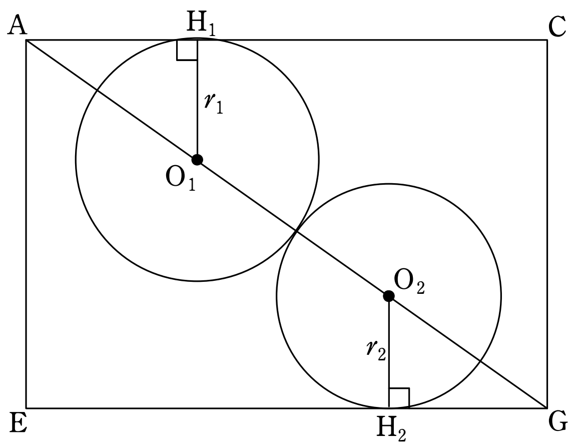
③点Oを中心とし，OS（OT）を半径とする円を描く

(2)　球O_1 は点A を含む立方体の 3 つの面と接し，球O_2 も点Gを含む立方体の 3 つの面と接するので，二つの球の中心はともに平面ACGE 上にある

さらに，球O_1 は平面ABCD とは線分AC 上で，球O_2 は平面EFGH とは線分EG 上で接するので，右図のようになる



したがって，断面図は以下のようになる



$AC : AE = \sqrt{2} : 1$ である

球O_1 の中心から辺AC に引いた垂線の交点をH_1，球O_2 の中心から辺EG に引いた垂線の交点をH_2 とすると，$O_1H_1 = r_1$，$AH_1 = \sqrt{2}\,r_1$

よって，三平方の定理より，$AO_1 = \sqrt{3}\,r_1$

球O_2 についても同様にして，$O_2G = \sqrt{3}\,r_2$

2 つの球は外接するので，$O_1O_2 = r_1 + r_2$

$AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CG^2} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{3}\,a$ であるから

$$\sqrt{3}\,r_1 + (r_1 + r_2) + \sqrt{3}\,r_2 = 2\sqrt{3}\,a$$

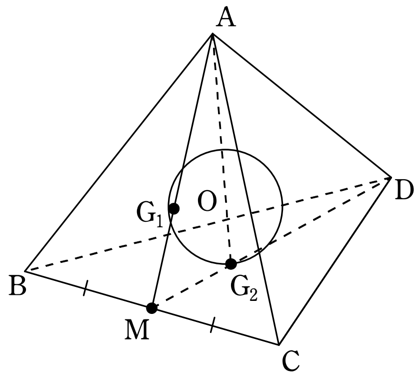
$$(\sqrt{3}+1)(r_1+r_2)=2\sqrt{3}\,a$$

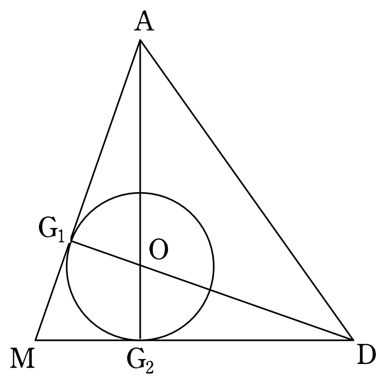
$$r_1+r_2=\frac{2\sqrt{3}\,a}{\sqrt{3}+1}=(3-\sqrt{3})a$$

ゆえに，r_1 と r_2 には関係式　$r_1+r_2=(3-\sqrt{3})a$　が成り立つ

(3)　正四面体は，内接球と各面の正三角形の外心（内心，重心，垂心も一致している）で接している

また，対称性より，内接球の中心O（半径 r）は平面AMD上にあって，球は平面ABC とは△ABC の重心$\mathrm{G_1}$ で接し，平面BCD とは△BCD の重心$\mathrm{G_2}$ で接している





よって，断面図は右上図のようになる

△ABC において，AB＝BC＝CA＝$2a$ より，BM＝CM＝a，AM＝$\sqrt{3}\,a$

△BCD においても同様にすると，DM＝$\sqrt{3}\,a$

$\mathrm{G_2}$ は△BCD の重心であるから，$\mathrm{DG_2}:\mathrm{MG_2}=2:1$

したがって

$$\mathrm{MG_2}=\frac{1}{3}\mathrm{DM}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\,a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

よって

$$\mathrm{AG_2}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{MG_2}^2}=\sqrt{(\sqrt{3}\,a)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{3}a^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a$$

$\triangle\mathrm{AOG_1}\backsim\triangle\mathrm{AMG_2}$ より $\mathrm{AO}:\mathrm{AM}=\mathrm{OG_1}:\mathrm{MG_2}$

$\mathrm{AO}=\mathrm{AG_2}-r$ であるから

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}a-r\right):\sqrt{3}\,a=r:\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\sqrt{3}\,ar=\frac{\sqrt{3}}{3}a\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}a-r\right)$$

これを解いて　$r=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$

別解：正四面体の内接球半径を求めるには体積を用いた次のような解法も有名

正四面体ABCD の体積は，各面の正三角形を底面として O を頂点とする 4 つの三角錐の体積の和に等しい

すなわち

正四面体ABCD＝三角錐OABC＋三角錐OACD＋三角錐OABD＋三角錐OBCD

正四面体の高さは前述のとおり $\mathrm{AG_2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$ である

また，右辺の 4 つの三角錐は合同であり，その高さは内接する球の半径 r に等しい

各面の正三角形の面積を S とすると

$$\frac{1}{3}\cdot S\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}a=4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot S\cdot r\right)$$

ゆえに　$r=\frac{\sqrt{6}}{6}a$

(4)　四面体APQD は $AD=2a$，$AP=AQ=PQ=a$，$PD=QD=\sqrt{3}\,a$ の四面体である

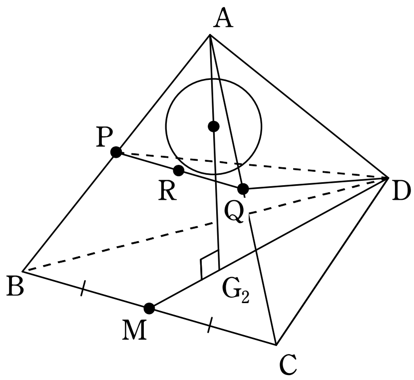
辺PQ の中点をR とする

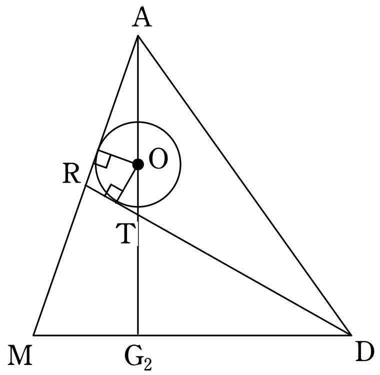
AP＝AQ かつ PD＝QD より，対称性から，四面体APQD の内接球の中心は平面ARD 上にあることがわかる

また，内接球と平面APQ との接点は辺AR 上にあり，内接球と平面PQD の接点は辺RD 上にある

よって，内接球を平面ARD で切った断面図を考えるとよい

内接球は平面ABC，平面ACD，平面ADB に接するので，中心は(3)で用いた点A から平面BCD に引いた垂線AG_2 上にあるので，断面図は下図のようになる





AG_2 と RD の交点を T とする

(3)より，△AMDは二等辺三角形だから，$\angle MDA=\angle MAD=\angle RAD$

よって，$\cos\angle RAD=\cos\angle MDA=\frac{DG_2}{AD}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

PQ の中点R は線分AM 上にあり，AMの中点なので，$AR=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

余弦定理から

$$\begin{aligned}RD^2&=AR^2+AD^2-2\cdot AR\cdot AD\cdot\cos\angle RAD\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+(2a)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot 2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{11}{4}a^2\end{aligned}$$

ゆえに，$RD=\frac{\sqrt{11}}{2}a$

メネラウスの定理より，$\frac{AR}{RM}\cdot\frac{MD}{DG_2}\cdot\frac{G_2T}{TA}=1$ であるから，$\frac{G_2T}{TA}=\frac{2}{3}$

したがって，$\triangle ART=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\triangle AMG_2=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{10}a^2$

また，メネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{DT}}{\mathrm{TR}}\cdot\dfrac{\mathrm{RA}}{\mathrm{AM}}\cdot\dfrac{\mathrm{MG_2}}{\mathrm{G_2D}}=1$ であるから，$\dfrac{\mathrm{DT}}{\mathrm{TR}}=4$

求める半径を r とすると

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ART}=\triangle\mathrm{ARO}+\triangle\mathrm{RTO}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AR}\cdot r+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{RT}\cdot r\\&=\frac{1}{2}r(\mathrm{AR}+\mathrm{RT})\\&=\frac{1}{2}r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}a\right)\\&=\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{11}}{20}ar\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{5\sqrt{3}+\sqrt{11}}{20}ar=\dfrac{\sqrt{2}}{10}a^2$ より，$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}+\sqrt{11}}a=\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{22}}{32}a$

別解：体積を用いて考える

四面体APQD の体積は四面体ABCD の $\dfrac{1}{4}$ であるから，四面体APQD の体積 V は

$$V=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2=\frac{\sqrt{2}}{6}a^2$$

$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$\triangle\mathrm{APD}=\triangle\mathrm{AQD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$，$\triangle\mathrm{PQD}=\dfrac{\sqrt{11}}{4}a^2$ であるから，求める半径を r とすると

$\dfrac{1}{3}(\triangle\mathrm{APQ}+\triangle\mathrm{APD}+\triangle\mathrm{AQD}+\triangle\mathrm{PQD})r=V$ から求めることもできる

(5) (4)と同様に四面体APQD は平面ARD に関して対称であるから，外接球の中心は平面ARD 上にあるとしてよい

△APD は ∠APD＝90° の直角三角形であるから，AD の中点を S とすると，3 点A，P，D は AD を直径とする円（中心はS ）の円周上にある

よって， SA＝SP＝SD

△AQD についても同様に考えると，SA＝SQ＝SD

したがって，SA＝SP＝SQ＝SD となり，S は 4 点A，P，Q，D から等距離にある点であるから，四面体APQD の外接円の中心は S であり，その半径は a である