解答例 (1)

(i)

	A	B	C	得点
A		○	×	1
B	×		×	0
C	○	○		2

(ii)

	A	B	C	得点
A		○	×	1
B	×		○	1
C	○	×		1

(2) (i) ${}_5C_2$＝10 通りである。

(ii) 次のとおりである。

	A	B	C	D	E	得点
A		×	○	×	○	2
B	○		○	○	○	4
C	×	×		○	○	2
D	○	×	×		×	1
E	×	×	×	○		1

(3) (i) たとえば，次の対戦表がそうである。

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	得点
A_1		○	×	○	×	×	×	×	×	2
A_2	×		○	×	○	×	×	×	×	2
A_3	○	×		×	×	○	×	×	×	2
A_4	×	○	○		○	×	○	×	×	4
A_5	○	×	○	×		○	×	○	×	4
A_6	○	○	×	○	×		×	×	○	4
A_7	○	○	○	×	○	○		○	×	6
A_8	○	○	○	○	×	○	×		○	6
A_9	○	○	○	○	○	×	○	×		6

(ii)［証明］この対戦表を書いたとき，条件②～⑤のことより

（○の総数）＝（1 列目～3 列目までの○の数）×2

が成り立つ。ここで，（○の総数）は対戦の総数 ${}_nC_2$ に一致する。また，i 行 j 列の○×と，j 行 i 列の○×は逆転することから，

（1 列目～3 列目までの○の数）＝（1 行目～3 行目までの×の数）

である。したがって，A_1 の得点，A_2 の得点，A_3 の得点をそれぞれ a_1, a_2, a_3 とすれば，

$$\frac{n(n-1)}{2} = 2\{(n-1-a_1)+(n-1-a_2)+(n-1-a_3)\}$$

となる。これから

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{(n-1)(n-12)}{4}$$

が得られる。$a_1 + a_2 + a_3 \geqq 0$ と，$n \geqq 4$ より，$4 \leqq n \leqq 12$ である。

$4 \leqq n \leqq 12$ なる自然数 n に対して上の式を計算すると次の表のようになる。

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a_1 + a_2 + a_3$ の値	6	7	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	7	6	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	0

まず，$a_1 + a_2 + a_3$ の値は整数でなければならないので，$n = 6$，7，10，11 は不適である。

条件②～④より，$a_1 + a_2 + a_3$ の値は偶数であるから $n = 5$，8 は不適である。

$n = 4$ のとき，（A_4 の得点）$= {}_4C_2 - (a_1 + a_2 + a_3) = 6 - 6 = 0$ となり，条件①と矛盾するので不適である。

$n = 12$ のとき，$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ となるが，たとえば A_1 対 A_2 ではどちらかは勝つ。したがってこれはありえないので不適である。

$n = 9$ のときは実際に（i）の例が存在する。

したがって $n = 9$ のみである。■