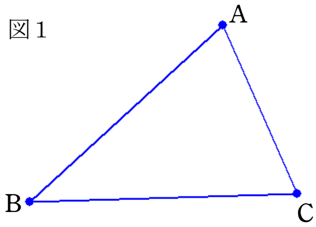
第２問

三角形の外接円の半径と内接円の半径の間に成り立つ関係式を求めたい。

(1)　解答用紙の△ABC（図１）に，外接する円の中心 O（外心）を定規とコンパスを用いて作図しなさい。なお，作図の際に用いたコンパスの跡等は消さずに残しておくこと。free−handで描いてもよいが，コンパスや定規をどのように使うのかわかるようにしておくこと。

図１



(2)　図２のように，△ABC の外接円O_1（中心O，半径 R ）及び内接円O_2（中心I，半径r ）を描き，直線AI と外接円の交点のうち，A と異なる方を点D とする。

　線分IO の長さを d とし，直線IO と外接円の交点について，点I に近い方を点P，点O に近い方を点Q とすると，△PAI と△DQI は相似なことを示し，$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{ID}=(R-d)(R+d)$ が成り立つことを示しなさい。

(3)　(2)の図２において，直線OD と外接円の交点のうち，Dと異なる点を点E とし，辺AC と内接円との接点を点F とする（図３）。このとき，△EDC と△AIF は相似であることを示し，$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{CD}=2Rr$ が成り立つことを示しなさい。

(4)　(3)の図３において，△IDC は二等辺三角形であることを示し，このことを用いて，△ABC の外接円O_1，内接円O_2 のそれぞれの半径 R，r，および中心間の距離 d，について

$d^2=R^2-2Rr$ が成り立っていることを示しなさい。なお，内接円の中心I は△ABC の各頂角の二等分線の交点であるので，∠BAI＝∠CAI，∠ACI＝∠BCI などが成り立つことを用いてよい。

図２

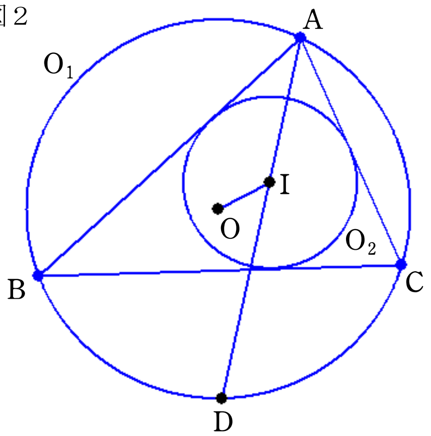
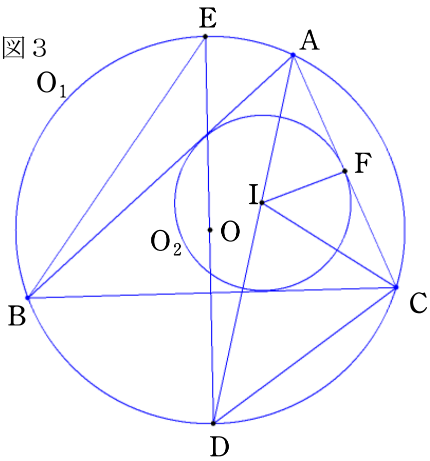


図３



(5)　大円O_3（中心O，半径 R ）の内部に小円O_4（中心I，半径 r ）があって，線分IO の長さを d としたとき，$d^2=R^2-2Rr$ が成り立っているとする。

　このとき，図４のように，円O_3 上に任意の点C′ をとり，点C′ から円O_4 に２本の接線ℓ_1，ℓ_2 を引く。直線ℓ_1 と円O_3 の交点のうち，C′ と異なる点を点B′，直線ℓ_2 と円O_3 の交点のうち，C′ と異なる点を点A′ とする。

　このとき，△A′B′C′ は円O_4 に外接する三角形になっていることを示しなさい。

図４