

配点 (1) 各3点 (2) 各3点 (3) 操作3点, 考察10点 (4) 12点

講評

この問題は、車を運転している時に何気なく考えている時に出てきた問題であったように思います。車を運転している時に、前を走る車のカーナンバーなどで四則演算をしたり、指数、対数計算を試してみたりすることがあります。注意しないと、前の車に追突してしましますが。そして、そのようなときに、しばしば、コンテストの問題ができたりします。もっとも、信号で止まったりした時や、車を降りた時にはもうほとんど忘れてしまっていますが。この問題は、自分ではさほど面白くもない思っていたのですが、他の先生達が面白かったので、出すことにしました。

さて、この問題は、問題の設定上、和が変化しないことが(2)で判明するのですが、果たして終了できるのかが問題です。正負入り交じっていて処理が面倒なので、色々考えた末、各項を2乗して正に変えて和をとって比較してみました。すると、操作が進むごとに和が減少していることに気がきました。これを説明してもらうことを主眼に出題しました。

最初、正の整数で考えましたが、やはり有理数や無理数(実数)でどうなるのかと思い、考察してみました。

i) 有理数のとき

3つの有理数を $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \frac{n_3}{m_3}$ ($m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ は整数。 $m_1 m_2 m_3 \neq 0$, 3つの分数は既約分数) と設定しました。

通分した分母は当然整数ですから、あとは分子同士だけの加減算になります。その振る舞いは整数の時と同じになります。ですから、最終的な答えはこの出題と同じになると思います。

ii) 無理数のとき

例えば、3つの数を $\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{2}$ とすると、次のようになって「終了」します。

$$\begin{array}{|c|} \hline \sqrt{5} \\ \hline -\sqrt{3} \\ \hline \sqrt{2} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \sqrt{5} - \sqrt{3} \\ \hline \sqrt{3} \\ \hline \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \\ \hline \sqrt{3} + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \\ \hline -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \sqrt{5} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} \\ \hline \sqrt{2} \\ \hline \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \hline \end{array}$$

注) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 7 + 2\sqrt{10} - 12 = 2\sqrt{10} - 5 = \sqrt{40} - \sqrt{25} > 0$ より $\sqrt{5} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} > 0$ が導かれる。

では、一般の無理数の場合や、有理数と無理数が混在している場合も「終了」するといえるでしょうか。興味を持った人はチャレンジしてみてください。

iii) さらに、初期条件と操作方法を全く逆にして「3つの数の和を負とおいて、少なくとも1つは正の数が存在する」、そして、「正の数を負に変えて、その正の数を他の2つの数に加える」として「正の数がなくなる場合、なくなった時点で処理が終了する」とした場合、結果は逆で、処理は終了します。

iv) 初期設定で「和が0である」場合は正負が振動して出現します。ですから、処理は終了しません。

有理数や無理数まで話を拡張して考察したとき、絶対値が小さくなっていくので、当初は3つの数が平均の値に向かって収束してゆくのかな?と予想しましたが、色々やってみると、実際は前記のように違っていました。

さらに、これらはまだ確認できていないのですが、

i) 負の数が2つある場合、どちらの負の数から処理を進めても、終了した時点で、その数字とその

並びが同じであること

- ii) 上の i で、途中から処理が枝分かれする場合、どの経路を辿っても終了するまでの処理回数が全て同じであること
- iii) 合計の正の数が多いほど、終了するまでの処理回数が少なくて済むことといったことも推察されます。興味のある人は、証明してほしいと思います。

(2)と(4)で、負の数が2つである場合の処理をしていない答案が、大変多数見受けられました。ここでは、両方の場合をきちんと処理して合っている場合に満点を与えています。もっとも、(2)では文章で言い換えることもできます。

予想通り(3)が大変でした。一言でいえば「考察の質を問うている」ということです。つまり、「正解である」、「不正解である」ということを判断しているのではなく「よく考察されているか」「そうでないか」または「よく洞察できているか」「考えが浅いか」ということです。勿論、これ以前に門前払いされるような答案もありましたが。

おおよそ世の中の事柄は「正しいか」「正しくないか」を問われることより、「よく考えられているか」「考えが浅いか」「中途半端にしか考えていないか」を問われる場合の方が多いのです。マイケル＝サンデルの「ハーバード白熱教室」でもそうですが、決して難しくない身の回りの事柄、身の回りで日常良く起きるような事柄を題材に取って、議論しています。そこには絶対に正解というものはず存在しません。一つの事柄が、時と場所を変えれば、別の評価を与えられるのです。

(3)が存在してその次に(4)が存在するのですから、(3)がきちんと解答して合っていないのに(4)が合うことはありません。(3)が理解できれば、(4)で答えるべき事柄は自ずとわかるはずですが。操作前後の式を比較して、ただ単純に判明することなどを問うてはいません。

また、(3)や(4)では、論述力、文章力も問われています。自分の考えていることを、どれだけ正確に他人に伝えることができるか。日頃から、しっかりと文章（特に、説明の文章や論説文）を書いている人は、自分の考えを正確に、間違いなく伝えるための練習を積み重ねてきていると思います。そうでない人は意味不明な文章を書いています。題意を理解できて、なおかつ、十分な論述力、文章力を持っている人の文章は簡潔で明快です。そのような答案もいくつか散見されました。

一度でも、自分の考えていることを文章にして他人に見てもらうことが重要です。自分ではわかっているつもりでも、いざ文章に書いてみると、何が何だかわけのわからない文章ができてしまうことがよくあります。自分の思考がどこかで不十分である証拠でしょう。何回か推敲して、わかりやすい文章に磨き上げることが重要です。

(4)で、負の数が2個の場合も言及しなくてはならない、と書きましたが、明確に言及していた答案は、321番の濱田君（石狩南）と53番の井上君（帯広柏葉）だけでした。濱田君は惜しくも未完成でした。井上君はほぼ完成していました。

なお、「終了する」とだけ書いてある答案には点を与えていません。

出題者と解答者は、問題を間に置いて問答をしているのです。「どうだ、わかるか?」「うーん、なんだ、何なんだ?」と。時には禅問答にもなります。

実は、この(3)の問題文を作ることに苦労しました。操作前後の各3つの項を2乗して足して比べよ、とってしまえばすぐにわかってしまう問題です。いかに悟られにくくして、しかし、題意のように誘導するか、文章を何度も推敲しました。

(北海道有朋高等学校 山崎昌典)

