配点 (1)〜(5)　各 8 点

講評

北海道高等学校数学コンテストでは毎年図形問題（幾何，特に平面幾何）を出題しています。今は高校の数学Aの教科書に平面図形の内容があり，模試や入試でもたまに出題されていますが，以前は平面図形についての勉強は中学までの内容で十分とされて，高校ではほとんど素通りされていた時代もありました。

しかし，例えば図を描いて多角形の辺や角の関係を考えたり，辺の比を使って面積や立体の体積を考えるときや論証を進める際に，逆，裏，対偶や必要十分条件など図形を用いて説明したほうがわかりやすい場合もあり，今教科書にある程度の内容は学んでおくべきだと思います。ただ，証明は苦手だという人が多いのではないでしょうか。証明問題の中には独力では到底思いつかないような難問もありますが，相似や合同など比較的見つけやすいものもあるので嫌悪せずに取り組んでほしいと思います。

今回の問題も題材は日本の江戸時代の数学の問題を集めた「算額」の問題集から見つけました。江戸時代の数学については，一昨年公開された映画「天地明察」やその原作である小説などで一時話題となりました。しかし，江戸時代の日本の数学「和算」についてはまだまだ多くの人に知られてはいません。できる限り紹介して皆さんに知ってもらえたらと思います。

数学コンテストの幾何問題はできるだけヒントをつけて多くの人が取り組みやすいように考えて出題していますが，ヒントの方法を使わずベクトルや座標を用いて解く方法も否定するものではありません。そういう答案があってもおかしくないですし，きちんと出来ていればそれなりに採点しますので（今後も）自分なりの発想で解いてくれてもかまいません。ただし，答だけを書けばいいというわけではありませんので採点者が読んで解答した人の発想が読み取れるような解答をお願いします。

(1)　三角形の外心の作図問題です。問題の中にも書きましたが，作図方法が明示されていればフリーハンドで描いていてもよしとしました。三角形の外心は辺の垂直二等分線の交点ですので，辺の垂直二等分線を 2 本引けば交点は定まります（本来は 3 本の垂直二等分線が一点で交わることを証明すべきですがそこまでは要求していません）。正解率は 84.8 %でした。誤答としては内心（角の二等分線の交点）や重心（中線の交点）を求めたものや円だけを描いて円の中心の作図方法が全く示されていないものなど，減点したものとしては作図方法が不明なものや辺の二等分線であるとだけ書いて作図方法が示されなかったものなどがあります。

(2)　答案用紙に図を描いて考えればどの角とどの角が等しいか比較的分かりやすい相似の問題（ 2 角相等の相似）ではないでしょうか。ただ，点Q と点B は一致すると勘違いして相似三角形がすべてダメになった人は大変もったいないと思います。また，用語の誤用も目立ちました（対頂角○→錯覚×，円周角→円に向かう角〜用語のド忘れでしょうか）。誤答としては AP∥QB として相似角を逆にとったものなどがありました。また，相似を使わず方べきの定理のみで示したものにも点数はあげています。

(3)　これも 2 角相等による相似から比例式で導けます。「直径ED の円周角」という表現は厳密にいうと間違いで，正しくは「弧ED （半円）の円周角」というべきでしょう。角の比較自体は見つけやすいので，(2)より出来ていました。正解率は 53.6 %でした。直角三角形なので三角比を使って示した人もいましたが，相似で示せますので sin，cos を使わなければいけないということはありません。

(4)　△IDC が二等辺三角形であることを示すにはどうするかですが，∠DIC＝∠DCI を示せばいい

ということは比較的わかりやすいと思うのですがどうでしょうか。

条件の(2)での $\mathrm{AI}\cdot\mathrm{TD}=(R-d)(R+d)$，(3)での $\mathrm{AI}\cdot\mathrm{CD}=2Rr$ から $\mathrm{ID}=\mathrm{CD}$ をいえば結論はすぐ導けるのですが，逆に証明すべき $d^2=R^2-2Rr$ から始めた人もいました。結論からスタートするのは原則として御法度です。必要十分性まで示せば（逆もしめすということ）ＯＫなのですが，そこまでした人はいませんでした。正解率は 25.9 ％でした。

(5)　「解答と解説」にも書きましたが，内接円半径と外接円半径に関する公式 $d^2=R^2-2Rr$ 自体は大変有名で過去にセンター試験でも出題されているほどなのですが，この逆については出題者も比較的最近知りました。その後，このことは三角形だけでなく一般の多角形についても成り立つことが 18 世紀に証明されていること，このことを道外のあるＳＳＨ（スーパーサイエンスハイスクール）の特設講義で取り上げていることをインターネット上で知りました。ある n 角形（$n\geqq 3$）に内接する円と外接する円があるとき，外接円のどの点からスタートしても，外の円に内接し内の円に外接する n 角形が作れるというのです。このことは円だけでなく，一般の２次曲線（楕円など）でも成り立つというのだから不思議な気がします。詳しくは射影幾何，ポンスレの（閉形）定理などで調べてみてください。

三角形についての証明はこの問題の(2)から(4)を逆にたどればいいのですが，きちんと答案にしていないものはダメとしました。ポイントは(4)の $d^2=R^2-2Rr$ が成り立っていれば△DIC は二等辺三角形になっていることです。この場合 A′I が ∠B′A′C′ の二等分線であることが示せるので，CI′と合わせて角の二等分線の交点より I が内心であることがわかります。さすがに(5)は手をつけていたのが 20 人程，正解者はわずか 4 人でした。

（北海道札幌旭丘高等学校　佐々木光憲）