着眼点

今回の問題は，折り紙を考えました。折り紙は英語で“Origami”といわれるほど，日本で大いに発展してきた分野です。また，この折り紙は，幾何学として位置づけられていますが，整数論の一分野（有名分野ではない）としても研究されています。紙を折ることは問題の通り 7 つの操作で表されます（藤田，Justin，羽鳥による。1989 年の論文にて）。応用としては，宇宙工学（宇宙でのソーラーパネル折り畳みで知られるミウラ折り）や医学（外科用血管ステント：第 29 回数学コンテスト第 5 問参照）などがあげられます。

折り紙公理と呼ばれるこの 7 つの操作は，コンパスによる作図により作図できる可能性が大きく，角の三等分線や 3 次方程式，多くの正多角形（例えば正七角形）が作図できます。

各問について。(1)では角の二等分線や線分の垂直二等分線を折る操作でどうするか。(2)はコンパスの作図とは違うもどかしさと操作を忠実に使用しているか。(3)は相似比，(4)は方べきの定理を利用。(5)は文章から折り紙をイメージして，「折る」ということの図形的特徴を理解し，証明で表現することを求めています。(6)はコンパスと定規による作図は，何をしているかを再確認する必要がありました。

最後にいくつかの参考図書を挙げます。

「オリガミクス〈１〉幾何図形折り紙」芳賀和夫　日本評論社

「折紙の数理とその応用」日本応用数理学会　共立出版

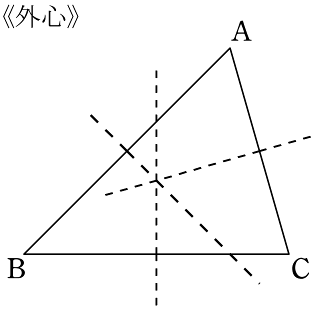
解答例

(1)　外心について。操作２により，各辺について両端の点が重なるように折り目を作ると，3 つの折り目は 1 点で交わる。その交点が外心となる。

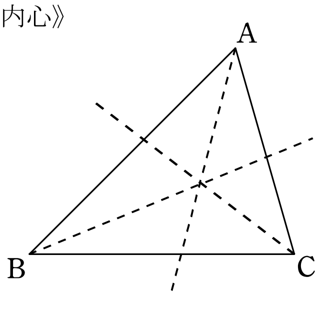
内心について。操作３により，各頂点について，その頂点からの 2 辺が重なるように折り目を作ると，3 つの折り目は 1 点で交わる。その交点が内心である。

重心について。操作１により，各辺について，外心を作る際にできた折り目と辺との交点と，残りの頂点の 2 点を通る直線を折ると，3 つの折り目は 1 点で交わる。その交点が重心である。

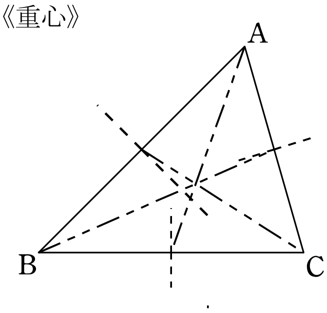
《外心》



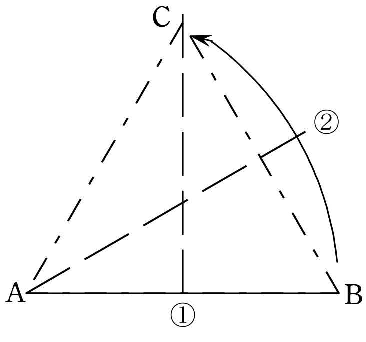
《内心》



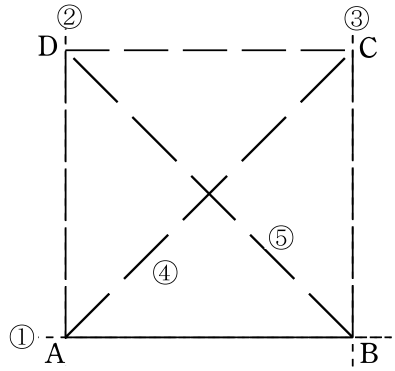
《重心》



(2)　正三角形ABC ～与えられた線分AB において，操作２により2 点A，B が重なるように折る（折り目①）。次に，操作５により，点A を通り，点B が折り目①上に重なるような直線で折る（折り目②）。点B のうつった点を点C とする。次に，操作１により，2 点B，C を通る直線，および，2 点C，A を通る直線でそれぞれ折って折り目を作る。このとき，△ABC は正三角形となる。

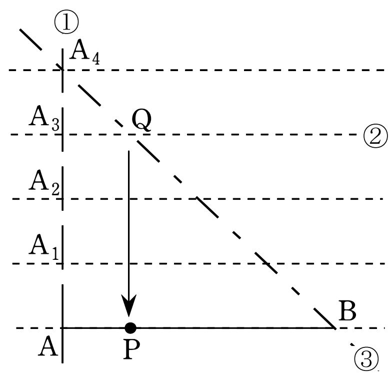


正方形ABCD ～操作１により直線AB を折る（折り目①）。また，操作４により，点Aで折り目①に垂直になるような直線で折る（折り目②）。同様に，点B においても折り目　①に垂直になるような直線で折る（折り目③）。そして，操作３により折り目①と折り目②とが重なるように折る（折り目④）。同様に，折り目①と折り目③とが重なるように折る（折り目⑤）。折り目②と折り目④との交点を点D，折り目③と折り目⑤との交点を点C として，操作１により直線CD で折ると，正方形ABCD を作図できる。

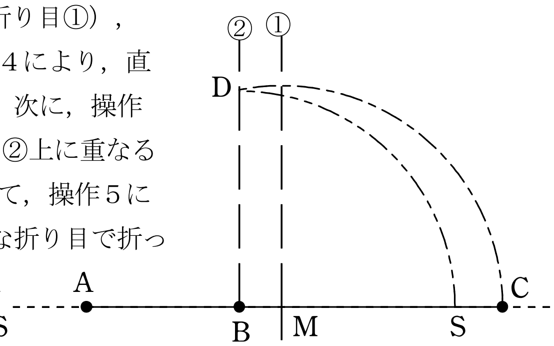


(3)　操作４により，直線ℓ に垂直で，点A を通る折り目（折り目①）を作る。折り目①上に点A_1 をとり，操作４により点A_1 を通り，折り目①と垂直である折り目を折り，点A がうつされる点を点A_2 とする。これを同様に繰り返し，折り目①上に順次，点A_3，点A_4，…，点A_n をとる。点A_{n-1} を通り，直線AB と平行な折り目を折り目②とする。操作１により直線A_nB を折り折り目を作る（折り目③）。折り目②と折り目③との交点を点Q として，操作３により直線ℓ と折り目②が重なるように折ると，点A_{n-1} が点A に重なる。このとき，点Q のうつった点が点P となる。

《$n=4$ のとき》



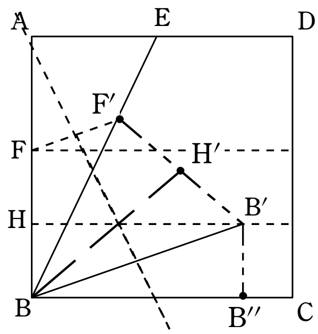
(4)　操作２により，２点A，C が重なるように折り（折り目①），折り目①と直線ℓ の交点を点M とする。また，操作４により，直線ℓ に垂直で点B を通る折り目（折り目②）を作る。次に，操作６により，点M を回転の中心として，点C が折り目②上に重なるように折り，点C がうつった点を点D とする。そして，操作５により，点B を通り，折り目②が直線ℓ に重なるような折り目で折ったときに，点D のうつった点が点S となる。（$a>1$ の場合は点S は線分BC 上に，$0<a<1$ の場合は点S は線分AB 上にとることになる。図は $a>1$ の場合。）



(5)　操作６により点F を辺BE 上に，点B を折り目上になるように折ったとき，点F，点H がうつった点を，それぞれ点F′，点H′ とする。また，点B′ から直線BC へ下ろした垂線と直線BC の交点を点B″ とする。

このとき，B′H⊥AB であり，操作６によって線分B′H は線分BH′にうつるので，B′H⊥B′F′。また，点H は線分BF の中点であるので，点H′ は線分B′F′ の中点となる。

以上のことから，△BB′F′ は BB′＝BF′ の二等辺三角形である。



△BB′B″ と △BB′H′ において，∠BB″B＝∠BH′B′＝90° で，斜辺BB′ が共通している。また，HB∥B′B″ より，∠HBB′＝∠B″B′B（錯角）であり，操作６により，∠HBB′＝∠H′B′B となる。これらより，∠B″B′B＝∠H′B′Bとなる。以上のことから，△BB′B″≡△BB′H′ となり，∠B″BB′＝∠H′BB′。

ゆえに，∠F′BH′＝∠H′BB′＝∠B′BB″ となり，鋭角である∠EBC を三等分できる。

(6)　定規は２点を通る直線を引くことができ，コンパスは１点からある距離だけ離れた点を打つことができる。これらから，定規とコンパスでは，２点を通る直線を引くことや１点からある距離だけ

離れた直線上の点を求めること，2 点からそれぞれの距離だけ離れた点を求めることができる。

2 点を通る直線は操作 1 により引くことができる。

1 点からある距離だけ離れた直線上の点は，操作 5 により与えられた長さの線分の端点の 1 つを円を描く中心におき，もう 1 つの線分の端点を直線に合わせる。操作 1 により，その合わせた 2 点を通る直線を折ることで点が求められる。

最後に，2 点からそれぞれの距離だけ離れた点は，前述の操作を 2 つの点で行う。そして，2 つの線分が，頂点を回転させ，重なるところで固定する。このとき，操作 1 により，その点を通る 2 直線を折ることで，その 2 本の折り目の交点が求める点となる。

以上により，コンパスと定規で作図できる図形は，紙を折ることでも作図できる。