着眼点

　この問題の主眼は(4)にあるように，この操作が有限回で終了するかどうかを判定することである。このための誘導として(3)が存在している。ここで「2乗の和」を比較して，操作後「2乗の和」が小さくなることに気付くかどうかが，解答に至ることができるかどうかを決定する分かれ目である。勿論，このことを証明できることが必要である。このため，(3)の問題文で，あえて「3つの数の2乗の和を求めて」という言葉を省いてある。これが存在すると即座に「わかる」からである。

解答例

(1)①
$$\begin{array}{|c|}\hline -3\\\hline 1\\\hline 3\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline -2\\\hline 0\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline -2\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline -1\\\hline 0\\\hline 2\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline -1\\\hline 1\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 1\\\hline 0\\\hline\end{array}$$

②
$$\begin{array}{|c|}\hline -3\\\hline -2\\\hline 6\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline -5\\\hline 3\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline -2\\\hline 5\\\hline -2\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline -4\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline -2\\\hline -1\\\hline 4\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline -3\\\hline 2\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline -1\\\hline 3\\\hline -1\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline -2\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline -1\\\hline 0\\\hline 2\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline -1\\\hline 1\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 1\\\hline 0\\\hline\end{array}$$

③
$$\begin{array}{|c|}\hline -4\\\hline -3\\\hline 10\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 4\\\hline -7\\\hline 6\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline -3\\\hline 7\\\hline -1\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 4\\\hline -4\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline -1\\\hline 0\\\hline 4\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline -1\\\hline 3\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$$

(2) i ）操作前の整数が $\begin{array}{|c|}\hline -a\\\hline b\\\hline c\\\hline\end{array}$ （$a>0$，$b>0$，$c>0$，$-a+b+c>0$）の場合

　1回操作を行うと，$\begin{array}{|c|}\hline -a\\\hline b\\\hline c\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline a\\\hline b-a\\\hline c-a\\\hline\end{array}$ となるので，操作後の3つの整数の和は

$a+(b-a)+(c-a)=-a+b+c>0$ となり，条件Aは保たれている

ii ）操作前の整数が $\begin{array}{|c|}\hline -a\\\hline -b\\\hline c\\\hline\end{array}$ （$a>0$，$b>0$，$c>0$，$-a-b+c>0$）の場合

　1回操作を行うと，ア）$\begin{array}{|c|}\hline -a\\\hline -b\\\hline c\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline a\\\hline -b-a\\\hline c-a\\\hline\end{array}$ または，イ）$\begin{array}{|c|}\hline -a\\\hline -b\\\hline c\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline -a-b\\\hline b\\\hline c-b\\\hline\end{array}$ となる

　ア）の場合，操作後の3つの整数の和は $a+(-b-a)+(c-a)=-a-b+c>0$ となり，条件Aは保たれている

　イ）の場合，操作後の3つの整数の和は $(-a-b)+b+(c-b)=-a-b+c>0$ となり，条件Aは保たれている

　よって，i，ii ア，ii イから，題意は示された

(3) $\begin{array}{|c|}\hline a\\\hline b\\\hline -c\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline a-c\\\hline b-c\\\hline c\\\hline\end{array}$

操作前の 3 つの整数のそれぞれの 2 乗の和は $a^2+b^2+c^2$ であり，操作後の 3 つの整数のそれぞれの 2 乗の和は $(a-c)^2+(b-c)^2+c^2=a^2+b^2+3c^2-2ac-2bc$ である

これらの差をとると，

$$(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+3c^2-2ac-2bc)=-2c^2+2ac+2bc=2c(a+b-c)$$

与えられた条件より，$c>0$，$a+b-c>0$ であるから

$2c(a+b-c)>0$　　すなわち，$a^2+b^2+c^2>a^2+b^2+3c^2-2ac-2bc$

ゆえに，操作後の 3 つの整数のそれぞれの 2 乗の和は，操作前の 3 つの整数のそれぞれの 2 乗の和よりも小さい

(4)　(3)から，3 つの整数のうち負の整数が 1 つの場合は，操作を繰り返すごとに 3 つの整数の 2 乗の和が小さくなることが示されたので，3 つの整数のうち負の整数が 2 つの場合について考察する

操作前の整数が $\begin{array}{|c|}\hline -a \\ \hline -b \\ \hline c \\ \hline \end{array}$ （$a>0$，$b>0$，$c>0$，$-a-b+c>0$）の場合，1 回操作を行うと，

ア） $\begin{array}{|c|}\hline -a \\ \hline -b \\ \hline c \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline -b-a \\ \hline c-a \\ \hline \end{array}$ または，イ） $\begin{array}{|c|}\hline -a \\ \hline -b \\ \hline c \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline -a-b \\ \hline b \\ \hline c-b \\ \hline \end{array}$ となる

ア）の場合，(3)と同様に考えると

$$\{(-a)^2+(-b)^2+c^2\}-\{a^2+(-b-a)^2+(c-a)^2\}$$
$$=(a^2+b^2+c^2)-(3a^2+b^2+c^2+2ab-2ac)$$
$$=-2a^2-2ab+2ac=2a(-a-b+c)>0$$

イ）の場合，

$$\{(-a)^2+(-b)^2+c^2\}-\{(-a-b)^2+b^2+(c-b)^2\}$$
$$=(a^2+b^2+c^2)-(a^2+3b^2+c^2+2ab-2bc)$$
$$=-2b^2-2ab+2bc=2b(-a-b+c)>0$$

よって，ア，イ，いずれの場合も，操作後の 3 つの整数のそれぞれの 2 乗の和は，操作前の 3 つの整数のそれぞれの 2 乗の和よりも小さい

以上のことから，「3 つの整数のそれぞれの 2 乗の和」は操作を繰り返すことで，つねに正の整数値をとりながら減少していく

したがって，3 つの整数の絶対値は小さくなっていく

また，(2)より「3 つの整数の和」はつねに正であるから，操作を繰り返すことで 3 つの整数から負の整数がなくなる

ゆえに，この操作は最終的に終了することが示された