着眼点

(1), (2)　x, y にいろいろな値を代入する。ただし，$f(0)$ とならないように気をつける。

(3)　$y=-2x$ を代入すると，$f(-x)$ の形がでてくる。

(4)　$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ の形をつくるためには，$x=1$，$y=x$ を代入すればよい。計算するとき，$f(x)\fallingdotseq 0$ であることに注意する。

(5)　x，y にそれぞれ $\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{a}{b}$ を代入し，(4)で証明した関係式を利用する。この設問の不等式の証明は，相加平均と相乗平均の関係を用いてもよい。

参考までに，この問題は関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ がもつ性質をもとに作問した。

解答例

$f(x+y)\left\{1+f\left(\dfrac{x}{y}\right)\right\}=f(x)$　……①　とする

(1)　①に $x=1$，$y=1$ を代入すると　$f(2)\{1+f(1)\}=f(1)$

条件 I より $f(1)=1$ であるから　$2f(2)=1$

よって，　$f(2)=\dfrac{1}{2}$

①に $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ を代入すると　$f(1)\{1+f(1)\}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

条件 I より $f(1)=1$ であるから　$1\cdot 2=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$　よって，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$

(2)　①に $x=2$，$y=-1$ を代入すると　$f(1)\{1+f(-2)\}=f(2)$

条件 I と(1)より $f(1)=1$，$f(2)=\dfrac{1}{2}$ であるから

$1\cdot\{1+f(-2)\}=\dfrac{1}{2}$　よって，$f(-2)=-\dfrac{1}{2}$

①に $x=-2$，$y=1$ を代入すると　$f(-1)\{1+f(-2)\}=f(-2)$

$f(-2)=-\dfrac{1}{2}$ であるから　$f(-1)\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

よって　$f(-1)=-1$

①に $x=-\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると　$f(-1)\{1+f(1)\}=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$f(-1)=-1$，$f(1)=1$ であるから　$(-1)\cdot(1+1)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　よって，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$

(3)　①に $y=-2x$ を代入すると　$f(-x)\left\{1+f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=f(x)$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$ であるから　$-f(-x)=f(x)$

ゆえに　$f(-x)=-f(x)$

(4)　条件 II と(3)より，$x<0$ のとき，$f(x)<0$ である

すなわち，0 以外のすべての実数 x に対して，$f(x)\fallingdotseq 0$ である

ここで，①に $y=1$ を代入すると　$f(x+1)\{1+f(x)\}=f(x)$　……②

次に，①に $x=1$，$y=x$ を代入すると　$f(1+x)\left\{1+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}=f(1)$

$$f(1+x)\left\{1+f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=1 \quad \cdots\cdots③$$

③の両辺に $f(x)$ をかけると　$f(x)f(1+x)\left\{1+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}=f(x) \quad \cdots\cdots④$

②と④より　$f(1+x)\{1+f(x)\}=f(x)f(1+x)\left\{1+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}$

$f(1+x)\fallingdotseq 0$なので　$1+f(x)=f(x)\left\{1+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}$

$$1+f(x)=f(x)+f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$$

よって　$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$　が成り立つ

(5)　①に $x=a$，$y=b$ を代入すると　$f(a+b)\left\{1+f\left(\dfrac{a}{b}\right)\right\}=f(a) \quad \cdots\cdots⑤$

①に $x=b$，$y=a$ を代入すると　$f(b+a)\left\{1+f\left(\dfrac{b}{a}\right)\right\}=f(b) \quad \cdots\cdots⑥$

⑤＋⑥から　$f(a+b)\left\{2+f\left(\dfrac{a}{b}\right)+f\left(\dfrac{b}{a}\right)\right\}=f(a)+f(b)$

したがって，$f\left(\dfrac{a}{b}\right)+f\left(\dfrac{b}{a}\right)\geqq 2$ を証明すればよい

ここで，(4)で証明した $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$ より　$f\left(\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{a}{b}\right)}$

また，条件Ⅱより，$\dfrac{a}{b}>0$ なので，$f\left(\dfrac{a}{b}\right)>0$である

$f\left(\dfrac{a}{b}\right)=t$とおくとき　$f\left(\dfrac{b}{a}\right)+f\left(\dfrac{a}{b}\right)-2=t+\dfrac{1}{t}-2=\dfrac{(t-1)^2}{t}\geqq 0$

ゆえに　$f\left(\dfrac{b}{a}\right)+f\left(\dfrac{a}{b}\right)\geqq 2$

よって　$f(a)+f(b)=\left\{2+f\left(\dfrac{b}{a}\right)+f\left(\dfrac{a}{b}\right)\right\}f(a+b)\geqq(2+2)f(a+b)=4f(a+b)$

したがって　$f(a)+f(b)\geqq 4f(a+b)$ が成り立つ