着眼点

18 世紀のスイスが生んだ大数学者オイラーの名前にちなんだ定理や法則はごまんとありますが，三角形に関するオイラーの定理といえばこの公式 です。ただし，この定理は，オイラーより先に 1746 年にチャップルが，1765 年にオイラーがチャップルとは独立に証明したそうです。数学コンテストでも過去にオイラー線に関する問題（三角形の外心、重心、垂心は一直線上にある：第２６回）を出題していますが，今回はこの問題の証明に取り組んでもらいました。

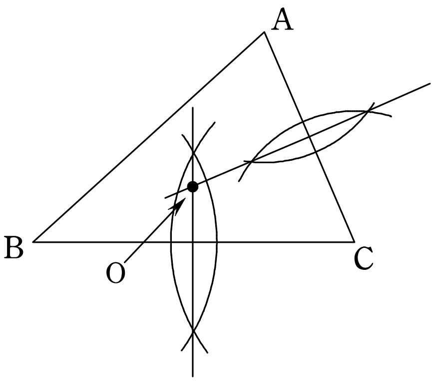
この定理の証明は，解答例のように平面幾何の性質を使ったもののほかにも，解析幾何（座標と図形の方程式等）を用いたもの，三角比を用いたもの，ベクトルを用いたものなど何種類もあります。平面幾何的な証明は三角形の相似，円周角の性質，方べきの定理などを用いるとそんなに難しくはないのですが，いくつかの事柄を組み合わせて証明するので，初見でノーヒントでは手に負えないかもしれません。

というわけで，(1)の作図問題を含めて，(2)から(4)までを誘導をつけて出題しました。一つ一つの設問について適切に図を描けば決して難しくはないと思います。(5)はこの定理の逆で，この条件を満たす 2 つの円があれば，大円上のどの点からスタートして小円に接する接線を引いても，大円に内接し，かつ，小円に外接する三角形が存在するというものです。実は，一般の n 角形についても同様な性質があり，ポンスレの閉形定理といいます。ポンスレはフランス革命－ナポレオン時代の数学者で，射影幾何学の開祖といわれている人です。

参考文献「和算の解法－美しい幾何の問題を解く楽しみ－」米山忠興　開成出版

解答例

(1)　右図参照：2 辺の垂直二等分線の交点を求めるとよい。



(2)　△PAI と△DQI において

円周角の性質により　$\angle \mathrm{PAD}=\angle \mathrm{DQP}$

よって　$\angle \mathrm{PAI}=\angle \mathrm{DQI}$　…①

対頂角であるから　$\angle \mathrm{PIA}=\angle \mathrm{DIQ}$　…②

①，②から　$\triangle \mathrm{PAI} \backsim \triangle \mathrm{DQI}$

したがって　$\mathrm{PI}:\mathrm{DI}=\mathrm{AI}:\mathrm{QI}$

よって　$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{ID}=\mathrm{PI}\cdot\mathrm{IQ}$

ここで，$\mathrm{PI}=\mathrm{PO}-\mathrm{OI}=R-d$，$\mathrm{IQ}=\mathrm{OQ}+\mathrm{OI}=R+d$

ゆえに　$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{ID}=(R-d)(R+d)$

（補足）方べきの定理を用いると，相似を示さなくても，$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{ID}=\mathrm{PI}\cdot\mathrm{IQ}$ が導かれる。

(3)　ED は円O_1 の直径であることから　$\angle \mathrm{ECD}=90^\circ$

IF は円O_2 の半径で，AC は円O_2 と接しているから　$\angle \mathrm{AFI}=90^\circ$

したがって　$\angle \mathrm{ECD}=\angle \mathrm{AFI}$　…③

円周角の性質より　$\angle \mathrm{DEC}=\angle \mathrm{DAC}=\angle \mathrm{IAF}$　…④

よって，③，④から　$\triangle \mathrm{EDC} \backsim \triangle \mathrm{AIF}$

したがって，　$\mathrm{ED}:\mathrm{AI}=\mathrm{CD}:\mathrm{FI}$　すなわち，　$\mathrm{ED}\cdot\mathrm{FI}=\mathrm{AI}\cdot\mathrm{CD}$

ここで，$\mathrm{ED}=2R$，$\mathrm{FI}=r$ であるから，　$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{CD}=2Rr$

(4)　I は△ABC の内接円の中心であるから，$\angle$BAC および $\angle$ACB の二等分線上にある

したがって，　$\angle \mathrm{BAI}=\angle \mathrm{CAI}=\alpha$，$\angle \mathrm{ACI}=\angle \mathrm{BCI}=\beta$　とおける

$\angle \mathrm{BCD}=\angle \mathrm{BAD}=\alpha$，$\angle \mathrm{BCI}=\beta$　より，　$\angle \mathrm{DCI}=\alpha+\beta$　…⑤

△AICにおいて，　$\angle\mathrm{CAI}=\alpha$，$\angle\mathrm{ACI}=\beta$　より，

$$\angle\mathrm{DIC}=\angle\mathrm{CAI}+\angle\mathrm{ACI}=\alpha+\beta \quad \cdots⑥$$

よって，⑤，⑥から，△IDC は DC＝DI の二等辺三角形である

よって，(2)，(3)の結果より　$(R-d)(R+d)=2Rr$

ゆえに　$d^2=R^2-2Rr$

(5)　A′I の延長と大円O_3 の交点を点D′ とする

また，直線IO と大円O_3 の交点のうち，Oに近い方を点P′，I に近い方を点Q′ する

すると，(2)と同様に　$\mathrm{A'I}\cdot\mathrm{ID'}=\mathrm{P'I}\cdot\mathrm{IQ'}$

が示せるので　$\mathrm{A'I}\cdot\mathrm{ID'}=(R+d)(R-d)=R^2-d^2 \quad \cdots⑦$

が得られる

また，D′O の延長と大円O_3 の交点を点E′，小円O_4 と辺C′A′ の接点を点F′ とする

すると，(3)と同様に　$\triangle\mathrm{E'D'C'}\backsim\triangle\mathrm{A'IF'}$

が示せるので　$\mathrm{A'I}\cdot\mathrm{C'D'}=2Rr \quad \cdots⑧$

が得られる

ここで，条件より，　$d^2=R^2-2Rr$，すなわち，　$R^2-d^2=2Rr$ が成り立つので

⑦，⑧より　$\mathrm{A'I}\cdot\mathrm{ID'}=\mathrm{A'I}\cdot\mathrm{C'D'}$

$\mathrm{A'I}\fallingdotseq 0$ であるから　$\mathrm{ID'}=\mathrm{C'D'}$

よって，△ID′C′ は二等辺三角形であるから，　$\angle\mathrm{D'IC'}=\angle\mathrm{D'C'I}$

ここで　$\angle\mathrm{D'IC'}=\angle\mathrm{IA'C'}+\angle\mathrm{IC'A'}$，$\angle\mathrm{D'C'I}=\angle\mathrm{D'C'B'}+\angle\mathrm{IC'B'}$ より

$$\angle\mathrm{IA'C'}+\angle\mathrm{IC'A'}=\angle\mathrm{D'C'B'}+\angle\mathrm{IC'B'} \quad \cdots⑨$$

弧B′D′ に対する円周角より　$\angle\mathrm{D'C'B'}=\angle\mathrm{D'A'B'}=\angle\mathrm{B'A'I} \quad \cdots⑩$

また，接線の性質より　$\angle\mathrm{IC'A'}=\angle\mathrm{IC'B'} \quad \cdots⑪$

⑨，⑩，⑪より　$\angle\mathrm{IA'C'}+\angle\mathrm{IC'B'}=\angle\mathrm{B'A'I}+\angle\mathrm{IC'B'}$

すなわち　$\angle\mathrm{IA'C'}=\angle\mathrm{B'A'I}$

したがって，A′I は ∠B′A′C′ の二等分線である

また，ℓ_1，ℓ_2 はともに小円O_4 の接線であるから，C′I は ∠A′C′I′ の二等分線である

ゆえに，I は △A′B′C′ の内心となり，小円O_4 は A′B′ にも接しており，△A′B′C′ は小円O_4 に外接する三角形である