着眼点

(1)，(2)は一見複雑そうですが，おちついて考えれば正解できます。

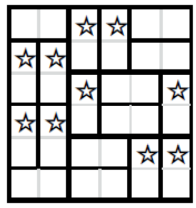
(3)は駒の並び方を問題の表のように忠実においていけば確実に求めたい図が得られます。

(4)はなんとなくわかる人もいるでしょう。その思いをいかに分かりやすく説明できるかがカギとなっています。

(5)はいままで考えてきた $f(k)$ を利用してその性質から何とか導き出そうとすれば思いつくかもしれません。

解答例

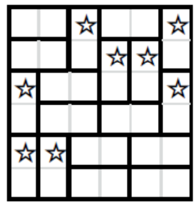
(1)　例１の敷き詰め方で，縦向きの駒の上半分に☆をつけると右の図のようになる。よって



k	1	2	3	4	5	6
$f(k)$	2	2	2	2	2	0

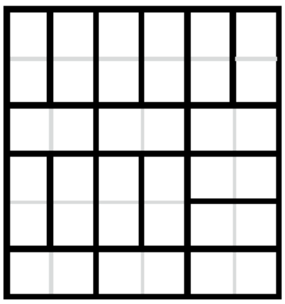
である。

(2)　(1)と同様にして



k	1	2	3	4	5	6
$f(k)$	2	2	2	0	2	0

(3)　例えば次のようなものが答えである。



(4)　負でないことおよび 6 以下であることは明らかであるから偶数であることを証明すればよい。

いま，6×6 のマス目を 1×2 の駒で敷き詰めたとする。

1 行目に着目する。横向きの駒の個数を n_1 個とする。このとき，残りのマス目には縦向きの駒が入り，いずれも 1 行目に駒の上半分がかかる。したがって，$f(1)=6-2n_1=2(3-n_1)$ であり，これは偶数である。

次に 2 行目に着目する。横向きの駒の個数を n_2 個とする。このとき，残りのマス目には縦向きの駒が入るが，$f(1)$ 個は下半分がかかっているのでカウントされない。したがって，
$f(2)=6-2n_2-f(1)=6-2n_2-(6-2n_1)=2(n_1-n_2)$ であり，これは偶数である。

さらに 3 行目に着目する。横向きの駒の個数を n_3 個とする。このとき，残りのマス目には縦向きの駒が入るが，$f(2)$ 個は下半分がかかっているのでカウントされない。したがって，
$f(3)=6-2n_3-f(2)=6-2n_3-2(n_1-n_2)=2(3-n_3-n_1+n_2)$ であり，これは偶数である。

以下同様にして $f(4)$，$f(5)$ も偶数である。また，6 行目には縦向きの駒の上半分がかかることはありえないので $f(6)=0$である。

(5)　駒は 18 個あるので，どのような敷き詰め方をしても縦向きの駒が 9 個以下または横向きの駒が 9 個以下になる。横向きの駒が 9 個以下の場合には図を 90° 回転することにすれば，一般性を失うことなく縦向きの駒が 9 個以下であるとしてもよい。

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$ の値は縦向きの駒の総数を表しているので（$f(6)=0$ であることに注意），$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5) \leqq 9$ である。ここで，$f(k)$（$1 \leqq k \leqq 5$）は負でない偶数であるから，$f(k)=0$ となる k（$1 \leqq k \leqq 5$）がある。

このとき，k 行目には横向きの駒か，縦向きの駒の下半分しかない。したがって，k 行目と $k+1$ 行目の間に，辺に平行な直線を引けば，どの駒にもかからないようにこのマス目を 2 つに分割できる。