第５問

下図の展開図からなる１辺の長さが a の正四面体ABCD がある。その各面には「１～４」の数字が書かれている。（数字１，２，３，４がそれぞれ△BCD，△ABC，△ACD，△ABDの中央に書かれている。）

また，△BCD の重心をG，頂点A から△BCD に下ろした垂線と△BCD との交点（「垂線の足」という）をH とする。

以下の問いに答えよ。

(1) BG，AH の長さを求めよ。

(2) 正四面体ABCD の体積 V を求め，正四面体ABCD の各面に接する内接球の半径 r を求めよ。

(3) 辺CD の中点をM とし，$\cos\angle \mathrm{AMB}$ を求めよ。

次に，「１」と書かれている面を底面とする。

頂点B を中心に辺を軸として正四面体ABCD を反時計回りに滑らないように転がし，元の位置に戻ったところで転がすのをやめる。これを第１包囲という。このとき，底面となる正三角形を合わせてできあがった図形を第１包囲図という。

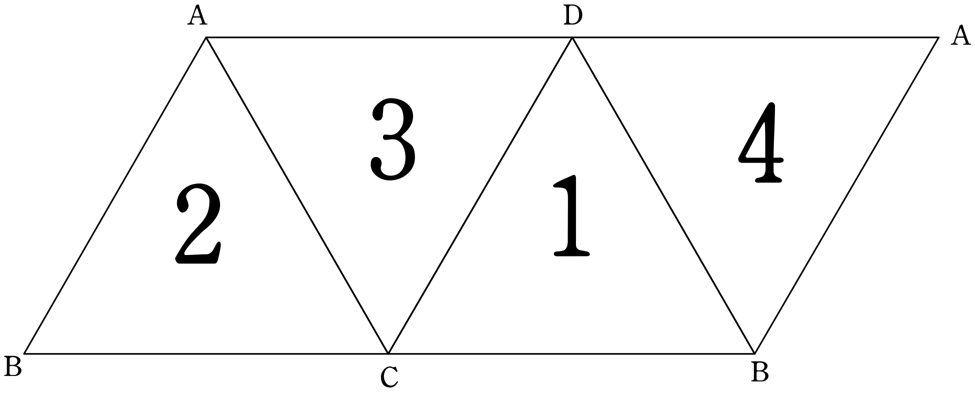
(4) 第１包囲で転がった正四面体ABCD の重心G′ が描く軌跡（軌跡とは点が描く図形である）の長さ l_1 を求めよ。また，真上から重心G′ が描く軌跡を見たとき，軌跡が囲む図形の面積 S_1 を求めよ。このとき，底面に来る数字を「1−2−3−…」のように書け。

必要があれば，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\theta=71^\circ$ としてよい。また，$\dfrac{71^\circ}{360^\circ}=\dfrac{1}{5}$ としてよい。

注）四面体の重心とは，四面体の各頂点から対面の重心に引いた線分の交点である。

（問題は次ページに続く）

【正四面体ABCD の展開図（自由に切って使ってもよい）】



さらに，「１」と書かれている面を底面とし，辺を軸とし，正四面体ABCD を「1−2−3−…」という順に第 1 包囲図を囲むように反時計回りに滑らないように転がす。元の位置に戻ったところで転がすのをやめる。これを第 2 包囲という。このとき，底面となる正三角形を合わせてできあがった図形を第 2 包囲図という。

(5) 第 2 包囲で転がった正四面体ABCD の重心G′ が描く軌跡の長さ l_2 を求めよ。また，真上から重心G′ が描く軌跡を見たとき，軌跡が囲む図形の面積 S_2 を求めよ。このとき，底面に来る数字を順に並べよ。

(6) 第 n 包囲が行われた場合，転がった正四面体ABCD の重心G′ が描く軌跡の長さ l_n を求めよ。また，真上から重心G′ が描く軌跡を見たとき，出来た図形の面積 S_n を求めよ。

(7) 第 1 包囲図の正三角形の上に題意の正四面体をそれぞれ置き，固定した。この状態で，この立体の型をとる。この立体にたっぷりと生クリーム塗りつけ，側面と上底（ふた）面をたるむことなく包装紙（ラップ）で包んだときにできる 14 面体（上底面と下底面が正六角形で，側面が 6 つの正三角形と 6 つの二等辺三角形）から元の立体を切り離したとき，できあがる立体の体積を求めよ。