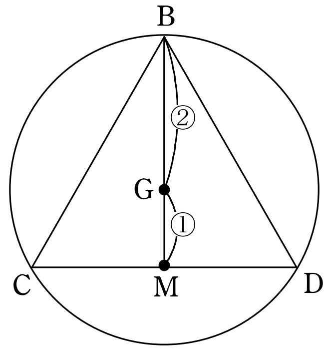
着眼点

正四面体の問題はオーソドックスですが，転がしてみたら面白いのではないかと思い，考えてみました。重心の軌跡や重心の軌跡を真上から見てみると，意外な景色が見えます。

解答例

(1)　$\mathrm{BG}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$



また，G と H は一致するので，△ABH で三平方の定理を用いると

$$a^2=\mathrm{AH}^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$$

ゆえに，AH＞0 から　$\mathrm{AH}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

【別解】

BG は△BCD の外接円の半径となるので，正弦定理より

$$\frac{a}{\sin 60^\circ}=2\mathrm{BG}\qquad \text{ゆえに，}\mathrm{BG}=\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

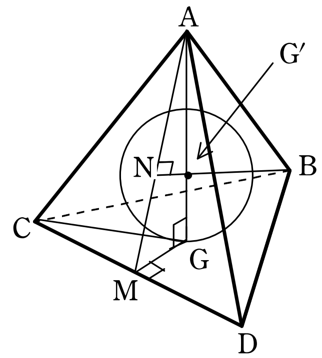
(2)　$V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^\circ\right)\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}a=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$　…①

内接球の中心をO とすると，正四面体ABCD は四面体OABC，四面体OBCD，四面体OCDA，四面体ODAB に分割することができるが，これら 4 つの四面体はすべて合同であり，頂点O から△ABC，△BCD，△CDA，△DAB までの距離が内接球の半径 r に等しいので

$$V=4\cdot\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^\circ\right)\cdot r\right\}=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2r\quad\cdots②$$

①と②から　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2r=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$　　ゆえに，$r=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$

【別解１】



内接円の中心O は正四面体ABCD の重心G′ と一致する

AG′：G′G＝3：1 となることを使えば

$$r=\mathrm{G'G}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$$

【別解２】

△ANG′∽△AGM より　NG′：GM＝AG′：AM

$$r:\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-r\right):\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

これを解いて　　$r=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$

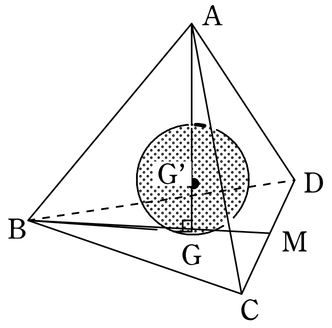
(3)　△ABM で余弦定理を用いて

$$\cos\angle\mathrm{AMB}=\frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{3}$$

(4)　図より

$$\mathrm{MG'}=\sqrt{\mathrm{MG}^2+\mathrm{GG'}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$

よって，軌跡の長さは



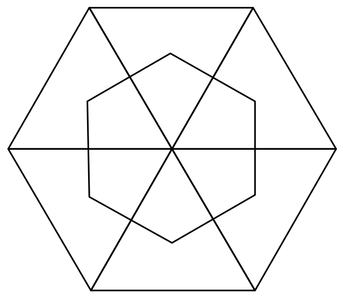
$$l_1=2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}a\cdot\frac{180^\circ-71^\circ}{360^\circ}\cdot 6=\frac{9\sqrt{2}}{10}\pi a$$

また，真上から見たとき，重心G′ が描く軌跡は正六角形になる

1 辺の長さを求めると

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)\cdot 2=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

よって，面積は



$$S_1=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\sin 60^\circ\right)\cdot 6=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

また，底面に来る数字は　1−4−2−1−4−2−1

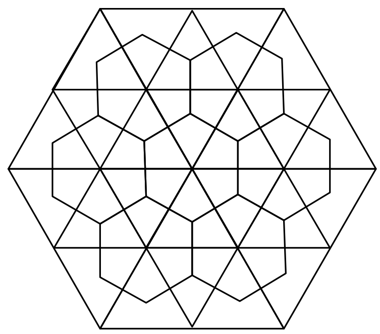
【参考】

角度を弧度法（ラジアン）で表すと

$$l_1=2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}a\cdot\frac{\pi-\theta}{2\pi}\cdot 6=\frac{3\sqrt{2}}{2}(\pi-\theta)a$$

ただし，θ は $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ （$0<\theta<\pi$）を満たす

(5)　軌跡の長さは



$$l_2=2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}a\cdot\frac{180^\circ-71^\circ}{360^\circ}\cdot 18=\frac{27\sqrt{2}}{10}\pi a$$

また，できあがった図形の中には正六角形が 7 つできるので，
面積は

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\cdot 7=\frac{7\sqrt{3}}{2}a^2$$

底面に来る数字は

1−2−3−1−4−2−1−3−4−1−2−3−1−4−2−1−3−4−1

または

1−3−4−1−2−3−1−4−2−1−3−4−1−2−3−1−4−2−1

または

1−4−2−1−3−4−1−2−3−1−4−2−1−3−4−1−2−3−1

【参考】

角度を弧度法（ラジアン）で表すと

$$l_2=2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}a\cdot\frac{\pi-\theta}{2\pi}\cdot 18=\frac{9\sqrt{2}}{2}(\pi-\theta)a$$

ただし，θ は $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ （$0<\theta<\pi$）を満たす

(6)　$n\geqq 3$ のとき，軌跡の長さは

$$l_n=2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}a\cdot\frac{180^\circ-71^\circ}{360^\circ}\cdot(2n-1)\cdot 6=\frac{9\sqrt{2}}{10}(2n-1)\pi a$$

新たにできあがる正六角形は，第 2 包囲で 6 個，第 3 包囲で 12 個，第 4 包囲で 18 個，……，
第 n 包囲では $6(n-1)$ 個となっている

よって，第 n 包囲のとき，正六角形の総数は

$$1+6+12+18+\cdots+6(n-1)=1+\frac{1}{2}(n-1)\{6+6(n-1)\}=3n^2-3n+1\ （個）$$

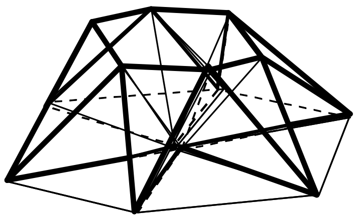
ゆえに，面積は

$$S_n=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2(3n^2-3n+1)$$

【参考】

$$1+6+12+18+\cdots+6(n-1)=1+\sum_{k=2}^{n}6(k-1)=1+\sum_{k=1}^{n}6(n-1)=3n^2-3n+1$$

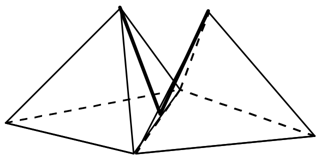
(7) 立体は，底面が 1 辺の長さ $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ の正六角形で高さが $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ の正六角錐と，題意の正四面体を 2 つの辺が接するように並べたときに，その隙間にできる 6 個の三角錐に分けて考えることができる



正六角錐の体積 V_1 は

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\sin 60^\circ\right)\cdot 6\right\}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

また，接した正四面体どうしのなす角（右下の図で太線どうしのなす角）を θ' とすると，余弦定理より



$$\cos\theta'=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{7}{9}$$

よって，　$\sin\theta'=\sqrt{1-\cos^2\theta'}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

三角錐について，正四面体の面（正三角形）を底面としたときの高さを h とすると

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\sin\theta'=\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{2\sqrt{6}}{9}a$$

したがって，三角錐 6 個分の体積 V_2 は

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^\circ\right)\cdot\frac{2\sqrt{6}}{9}a\cdot 6=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

ゆえに，求める体積は

$$V_1+V_2=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3+\frac{\sqrt{2}}{3}a^3=\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$$