$\boxed{\text{着眼点}}$

一番重要な所は，可能性の高さの考え方である。可能性とは，起こり得る場合のうち，どれだけの頻度で起こるのかが指標であろう。それを数値化するのが本質的に重要である。物事の出現度を数量的に捉えることは，これからも必要となる。

事象Ａを，「８個の球の入った袋から赤球２個，白球２個を取り出す場合」とする。(4)において，最初の状態を (赤球の個数，白球の個数) で表すと，(8，0)，(7，1)，(6，2)，(5，3)，(4，4)，(3，5)，(2，6)，(1，7)，(0，8) の９通りの場合があるが，事象Ａが起こったときは，(6，2)，(5，3)，(4，4)，(3，5)，(2，6) に限定される。可能な５通り (6，2)，(5，3)，(4，4)，(3，5)，(2，6) は，平等に起こるのであろうか。そのことに注意する必要がある。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1) ${}_8\mathrm{C}_4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\dfrac{1}{256}=\dfrac{35}{128}$　　(答)

(2) $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_4}=\dfrac{\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}}{\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{2\cdot3\cdot2\cdot3}{7\cdot2\cdot5}=\dfrac{18}{35}$　　(答)

(3) $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_4}=\dfrac{\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot3}{7\cdot2\cdot5}=\dfrac{3}{7}$　　(答)

(4) 赤球も白球もそれぞれ２個以上入っているから，最初の赤球と白球の個数は，(赤，白)＝(6，2)，(5，3)，(4，4)，(3，5)，(2，6) の場合が可能である

最初袋に入っていた状態が，赤球６個，白球２個であった場合，赤球２個，白球２個が取り出される確率は　$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_4}=\dfrac{\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot1}{7\cdot2\cdot5}=\dfrac{3}{14}$

さて，ここで，可能性の高さを次のように定める

事象 E が起こった下で，事象 A が起こる確率を $P_E(A)$ で表すとき，

「原因の事象を E_1，E_2，……，E_n（互いに排反で，かつ，$E_1\cup E_2\cup\cdots\cdots\cup E_n=\Omega$ 全事象）

であるとしたとき，結果の事象 A が起こる，原因の事象 E_i の可能性の高さは $P_A(E_i)$ と考えられる

すなわち，

$$P_A(E_i)=\frac{P(A\cap E_i)}{P(A)}=\frac{P(A\cap E_i)}{P(A\cap E_1)+P(A\cap E_2)+\cdots\cdots+P(A\cap E_n)}$$
$$=\frac{P(E_i)P_{E_i}(A)}{P(E_1)P_{E_1}(A)+P(E_2)P_{E_2}(A)+\cdots\cdots+P(E_n)P_{E_n}(A)}$$

で定める」

いま，原因の事象 E_i：赤球 $i-1$ 個，白球 $9-i$ 個（$1\leqq i\leqq 9$）とおくと，

$P(E_i)={}_8\mathrm{C}_{i-1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$ である

すなわち，$P(E_1)=\dfrac{1}{256}$，$P(E_2)=\dfrac{8}{256}$，$P(E_3)=\dfrac{28}{256}$，$P(E_4)=\dfrac{56}{256}$，$P(E_5)=\dfrac{70}{256}$，

$P(E_6)=\dfrac{56}{256}$，$P(E_7)=\dfrac{28}{256}$，$P(E_8)=\dfrac{8}{256}$，$P(E_9)=\dfrac{1}{256}$

最初袋に入っていた状態が，赤球 4 個，白球 4 個の場合が最も可能性が高い

その可能性の高さを数値で表すと

$$\frac{\frac{70}{256}\cdot\frac{18}{35}}{\frac{1}{256}\cdot 0+\frac{8}{256}\cdot 0+\frac{28}{256}\cdot\frac{3}{14}+\frac{56}{256}\cdot\frac{3}{7}+\frac{70}{256}\cdot\frac{18}{35}+\frac{56}{256}\cdot\frac{3}{7}+\frac{28}{256}\cdot\frac{3}{14}+\frac{8}{256}\cdot 0+\frac{1}{256}\cdot 0}$$

$$=\frac{70\cdot 36}{28\cdot 15+56\cdot 30+70\cdot 36+56\cdot 30+28\cdot 15}=\frac{6}{1+4+6+4+1}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8} \qquad \text{(答)}$$

(5) $\dfrac{{}_4C_3\cdot{}_4C_1}{{}_8C_4}=\dfrac{4\cdot 4}{7\cdot 2\cdot 5}=\dfrac{8}{35}$ (答)

(6) $\dfrac{{}_5C_3\cdot{}_3C_1}{{}_8C_4}=\dfrac{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot 3}{7\cdot 2\cdot 5}=\dfrac{3}{7}$ (答)

(7) 2 回の試行で最初袋に入っていた状態は，赤球 3 個以上，白球 2 個以上である

よって，赤球と白球の個数は，(赤，白)=(6，2)，(5，3)，(4，4)，(3，5) が可能である

それぞれの場合，1 回目に赤球 2 個，白球 2 個が取り出され，2 回目に赤球 3 個，白球 1 個が取り出される確率は

(赤，白)=(6，2) のとき $\dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2}{7\cdot 2\cdot 5}=\dfrac{2\cdot 3}{7^2}$

(赤，白)=(5，3) のとき $\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{3^2}{7^2}$

(赤，白)=(4，4) のとき $\dfrac{18}{35}\cdot\dfrac{8}{35}=\dfrac{2^4\cdot 3^2}{5^2\cdot 7^2}$

(赤，白)=(3，5) のとき $\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{1\cdot 5}{7\cdot 2\cdot 5}=\dfrac{3}{2\cdot 7^2}$

ゆえに，最初袋に入っていた状態が，赤球 5 個，白球 3 個の場合が最も可能性が高く，その可能性の高さを数値で表すと

$$\frac{\frac{56}{256}\cdot\frac{3^2}{7^2}}{\frac{28}{256}\cdot\frac{2\cdot 3}{7^2}+\frac{56}{256}\cdot\frac{3^2}{7^2}+\frac{70}{256}\cdot\frac{2^4\cdot 3^2}{5^2\cdot 7^2}+\frac{56}{256}\cdot\frac{3}{2\cdot 7^2}}$$

$$=\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 5}{2^3\cdot 3\cdot 5+2^3\cdot 3^2\cdot 5+2^5\cdot 3^2+2^2\cdot 3\cdot 5}=\frac{2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5+2\cdot 3\cdot 5+2^3\cdot 3+5}=\frac{30}{69}=\frac{10}{23} \qquad \text{(答)}$$

(8) 3 回の試行が起こる確率は，最初袋に入っていた状態によって

(赤，白)=(6，2) のとき $\dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{2^3\cdot 3}{7^3}$

(赤，白)=(5，3) のとき $\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{3^3}{7^3}$

(赤，白)=(4，4) のとき $\dfrac{18}{35}\cdot\dfrac{8}{35}\cdot\dfrac{8}{35}=\dfrac{2^7\cdot 3^2}{5^3\cdot 7^3}$

(赤，白)=(3，5) のとき $\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{1}{14}\cdot\dfrac{1}{14}=\dfrac{3}{2^2\cdot 7^3}$

ゆえに，最初袋に入っていた状態が，赤球 5 個，白球 3 個の場合が最も可能性が高く，その可能性の高さを数値で表すと

$$\frac{\frac{56}{256}\cdot\frac{3^3}{7^3}}{\frac{28}{256}\cdot\frac{2^3\cdot 3}{7^3}+\frac{56}{256}\cdot\frac{3^3}{7^3}+\frac{70}{256}\cdot\frac{2^7\cdot 3^2}{5^3\cdot 7^3}+\frac{56}{256}\cdot\frac{3}{2^2\cdot 7^3}}$$

$$=\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^4\cdot 5^2+2^2\cdot 3^2\cdot 5^2+2^7\cdot 3+5^2}=\frac{900}{400+900+384+25}=\frac{900}{1709} \qquad \text{(答)}$$