$\boxed{\text{着眼点}}$

(1)　x，y に 0 を代入する。

(2)　x に 0 を代入し，y の関数とみなし，y を x にすればよい。

(3)　$f(2x)$ については，$y=x$ を代入する。$f\left(\dfrac{1}{3}x\right)$ については，x，y をそれぞれ $\dfrac{2}{3}x$，$\dfrac{1}{3}x$ にすればよい。

(4)　(1)，(2)より $f(x)$ のおき方を工夫し，(3)より次数を求め，関数を決定する。

(5)　b の値についての場合分けが必要となる。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1)　（※）に $x=y=0$ を代入すると　　$f(0)+f(0)=2f(0)+2f(0)$

よって，　　$f(0)=0$

(2)　（※）に $x=0$ を代入すると　　$f(y)+f(-y)=2f(0)+2f(y)$

$f(0)=0$ であるから　　　　　　　$f(-y)=f(y)$

y を x として　　$f(-x)=f(x)$ が成り立つ

(3)　（※）に $y=x$ を代入すると　　$f(2x)+f(0)=2f(x)+2f(x)$

よって，　　$f(2x)=4f(x)$

次に，（※）の x に $\dfrac{2}{3}x$ を，y に $\dfrac{1}{3}x$ をそれぞれ代入すると

$$f\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x\right)+f\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x\right)=2f\left(\frac{2}{3}x\right)+2f\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{3}x\right)=2f\left(\frac{2}{3}x\right)+2f\left(\frac{1}{3}x\right)\quad\cdots①$$

ここで，$f(2x)=4f(x)$より

$$f\left(\frac{2}{3}x\right)=f\left(2\cdot\frac{1}{3}x\right)=4f\left(\frac{1}{3}x\right)$$

が成り立つので，①より

$$f(x)+f\left(\frac{1}{3}x\right)=2\cdot4f\left(\frac{1}{3}x\right)+2f\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$9f\left(\frac{1}{3}x\right)=f(x)$$

よって，　　$f\left(\dfrac{1}{3}x\right)=\dfrac{1}{9}f(x)$

(4)　$f(0)=0$ より，定数項は 0 である

次に，$f(-x)=f(x)$より，次数が奇数の項の係数は 0 である

したがって，$f(x)$ は偶数次の項のみからなる整式である

ここで，$f(x)$の次数を $2n$（n は正の整数）とし，$2n$ 次の項の係数を A（ただし，$A\neq0$）とおくと，$f(2x)=4f(x)$ より，$2^{2n}A=4A$ となり，$n=1$

よって，$f(x)$の次数は 2 次であり，$f(x)=Ax^2$（$A\neq0$）

(5)　（※※）に $y=0$ を代入すると，　$g(x)=bg(x)+bg(0)$　$\cdots②$

（ⅰ）$b\neq1$ のとき　$g(x)=\dfrac{bg(0)}{1-b}$　$\cdots③$

$b=\dfrac{1}{2}$ のとき，③より　$g(x)=g(0)$　となり，$g(x)=c$（c は定数）とおくことができる

$b\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$ のとき，（※※）に $x=y=0$ を代入すると，$g(0)=0$ となるので，③より

$g(x)=0$ である

（ⅱ）$b=1$ のとき　（※※）に$x=0$を代入すると

$$g(ay)+g(-ay)=2g(0)+2g(y)$$

$g(0)=0$ より，$g(ay)+g(-ay)=2g(y)$　…④

$g(x)$ の次数を n とし，n 次の係数を B（ただし，$B\fallingdotseq 0$）とおく

このとき，④の左辺の n 次の係数は $\{a^n+(-a)^n\}B$ であり，④の右辺の n 次の係数は $2B$ である

したがって，$\{a^n+(-a)^n\}B=2B$ であり，この等式を満たすためには，n が偶数であり，$a^n=1$ である

aは実数なので，$a=\pm 1$となる

ゆえに，　$g(x)=Bx^2$

よって，（ⅰ）（ⅱ）より

$b=\dfrac{1}{2}$ のとき，$g(x)=c$（c はすべての実数）

$b\fallingdotseq 1,\ b\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$ のとき，$g(x)=0$

$b=1$のとき，$g(x)=Bx^2$（Bはすべての実数）