着眼点

本問の意図することは，正方形での $x+y$ と CH との大小関係であり，直角三角形においては等しくなり（→(1)），この大小関係は C の鋭角，鈍角の境目となっている。

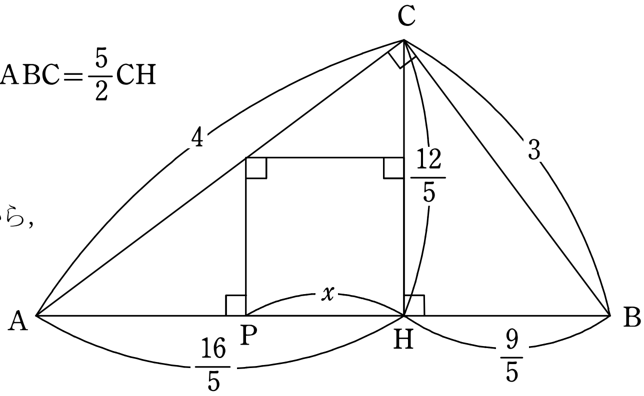
また，全体的に文字による複雑な計算であり，(4)では，(2)，(3)の結果を駆使して $\dfrac{x+y}{\mathrm{CH}}$ をシンプルに表していくことが要求されている。

加えて(6)では，底辺AB上にない正多角形の頂点と，△ABCの他の辺との共有の仕方による場合分けが必要となっている。（この必要性により，正方形以外では(5)のような良い性質が成立しない）

(7)は逆転の発想として，正多角形の一辺の長さを固定して△ABCを変化させて考える問題であり，動きをもって現象の本質を捉えることが解答の鍵となっている。

解答例

(1) △ABCの面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$



また，△ABCをCHを用いて表すと　△ABC$=\dfrac{5}{2}$CH

よって，　CH$=\dfrac{12}{5}$

また，三平方の定理より AB$=5$ であるから，

$$\tan A=\frac{3}{4},\ \cos A=\frac{4}{5}$$

よって，　AH$=4\cos A=\dfrac{16}{5}$

図より，AP$=\dfrac{16}{5}-x$ であり，$\tan A=\dfrac{x}{\dfrac{16}{5}-x}$ となるので

$$\frac{x}{\dfrac{16}{5}-x}=\frac{3}{4}\qquad \text{すなわち，}\quad 4x=3\left(\frac{16}{5}-x\right)\qquad \text{ゆえに，}\quad x=\frac{48}{35}$$

(2) △ABCの面積を S とすると，　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ であるから

$$\mathrm{CH}=\frac{ab\sin C}{\mathrm{AB}}$$

正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2R$ であるから，$\dfrac{\sin C}{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2R}$　　ゆえに，　CH$=\dfrac{ab}{2R}$

(3) (1)と同様に，AH$=b\cos A$

AP$=$AH$-x=b\cos A-x$ であるから，$\tan A=\dfrac{x}{b\cos A-x}$

これを x について解くと，　$x=\dfrac{b\sin A\cos A}{\sin A+\cos A}$

x と y の対等性から，　$y=\dfrac{a\sin B\cos B}{\sin B+\cos B}$

(4) (2)，(3)から，

$$\frac{x+y}{\mathrm{CH}}=\frac{\dfrac{b\sin A\cos A}{\sin A+\cos A}+\dfrac{a\sin A\cos A}{\sin B+\cos B}}{\dfrac{ab}{2R}}$$

正弦定理から，　$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$ であるから

$$\frac{x+y}{\mathrm{CH}}=\frac{\dfrac{2R\sin A\sin B\cos A}{\sin A+\cos A}+\dfrac{2R\sin A\sin B\cos B}{\sin B+\cos B}}{2R\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin A+\cos A}+\frac{\cos B}{\sin B+\cos B}$$

A，B は鋭角であるから，$\cos A\fallingdotseq 0$，$\cos B\fallingdotseq 0$ より

$$\frac{x+y}{\mathrm{CH}}=\frac{1}{1+\tan A}+\frac{1}{1+\tan B}$$

(5)　$x+y=\mathrm{CH}$ より，$\dfrac{x+y}{\mathrm{CH}}=1$ であるから，(4)より

$$\frac{1}{1+\tan A}+\frac{1}{1+\tan B}=1$$

$$(1+\tan B)+(1+\tan A)=(1+\tan A)(1+\tan B)$$

ゆえに，　$\tan A\tan B=1$

$\tan B=\dfrac{1}{\tan A}$ と $\tan(90^\circ-A)=\dfrac{1}{\tan A}$ から，　$\tan B=\tan(90^\circ-A)$

$0^\circ<A<90^\circ$，$0^\circ<B<90^\circ$ であるから，$0^\circ<90^\circ-A<90^\circ$

よって，　$B=90^\circ-A$　　ゆえに，$A+B=90^\circ$

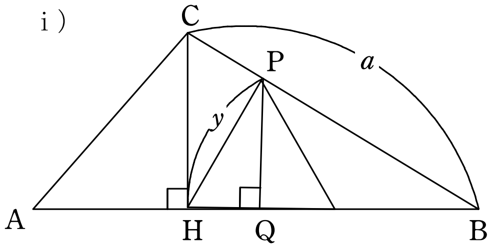
したがって，$C=180^\circ-(A+B)=90^\circ$ となるので，△ABC は直角三角形である

(6) i) $A\leqq 60^\circ$，$B\leqq 60^\circ$ のとき

図より，$\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$，$\mathrm{QH}=\dfrac{1}{2}y$ であるから　$\mathrm{BQ}=a\cos B-\dfrac{1}{2}y$

これより，　$\tan B=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}y}{a\cos B-\dfrac{1}{2}y}$

i)



ゆえに，　$y=\dfrac{2a\sin B\cos B}{\sin B+\sqrt{3}\cos B}$

$\dfrac{y}{\mathrm{CH}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+\cos B}$ であるから

$$P_3(A,\ B)=\frac{2}{\sqrt{3}+\tan A}+\frac{2}{\sqrt{3}+\tan B}$$

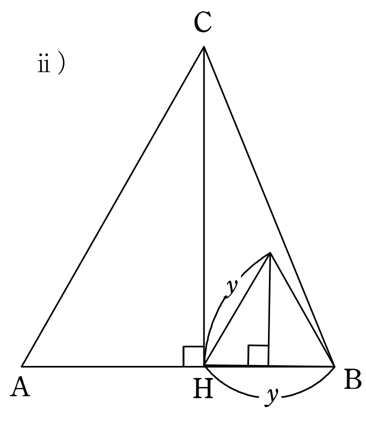
ii) $A\geqq 60^\circ$，$B\geqq 60^\circ$ のとき

図より，$y=\mathrm{BH}$

よって，$\dfrac{y}{\mathrm{CH}}=\dfrac{1}{\tan B}$ であるから

$$P_3(A,\ B)=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}$$

ii)



iii) $A\geqq 60^\circ$，$B\leqq 60^\circ$ のとき

i，ii より

$$P_3(A,\ B)=\frac{1}{\tan A}+\frac{2}{\sqrt{3}+\tan B}$$

iv) $A\leqq 60^\circ$，$B\geqq 60^\circ$ のとき

i，ii より

$$P_3(A,\ B)=\frac{2}{\sqrt{3}+\tan A}+\frac{1}{\tan B}$$

(7)　y を固定して B の大きさを変化させて CH の長さを考える

B を大きくすると CH は長くなり，B を 90° に近づけると CH は限りなく大きくなる

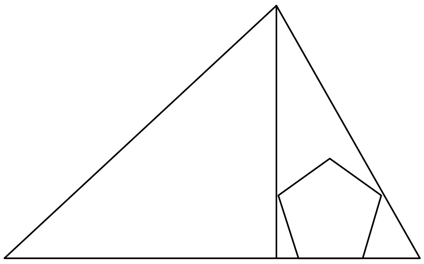
すなわち，$\dfrac{y}{\mathrm{CH}}$ は 0 に近づく

また，B を小さくすると CH もまた短くなり，B を 0° に近づけると CH は正 n 角形の幅（n が奇数のときは頂点と対辺との距離，n が偶数のときは対辺間の距離）に近づいていく

幅を d とすると

ⅰ）n が奇数のとき

$d=\dfrac{y}{2\tan\dfrac{90^\circ}{n}}$ であるから，$0<\dfrac{y}{\mathrm{CH}}<\dfrac{y}{\dfrac{y}{2\tan\dfrac{90^\circ}{n}}}=2\tan\dfrac{90^\circ}{n}$



ゆえに，　$0<P_n(A,\ B)<4\tan\dfrac{90^\circ}{n}$

ⅱ）n が偶数のとき

$d=y\tan\left(90^\circ-\dfrac{180^\circ}{n}\right)$

よって，　$\dfrac{y}{\mathrm{CH}}<\dfrac{y}{y\tan\left(90^\circ-\dfrac{180^\circ}{n}\right)}=\tan\dfrac{180^\circ}{n}$

ゆえに，　$0<P_n(A,\ B)<2\tan\dfrac{180^\circ}{n}$