$\boxed{\text{着眼点}}$

(1)，(2)，(4)はともかく，(3)に関しては，両端から 2 つずつ組み合わせて足していく方法に気づいてほしいと思います。そうすれば，すべての分子に共通の因数が現れることがわかります。

(5)に関しては，新たな発想が必要です。(4)が(5)のヒントになります。(4)で，ただ和を計算するだけでは何の意味もありません。計算に工夫を入れることを考えながら計算してください。そこで，正負が交互にあることをどのように処理するかです。(4)で気づいた人は，(5)の式の符号をすべて正に変えて，そこから偶数項のみ 2 倍したものの和を引けばよいことに着想できるかどうかです。このことを一般化したものが(6)です。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{49}{20}=\dfrac{7\cdot7}{20}$ から，A は 7 の倍数である

(2)
$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{8}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{8}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\\&=\frac{533}{840}=\frac{13\cdot41}{840}\end{aligned}$$

よって，C は13 の倍数である

(3) m が 3 以上の素数であることから，$m-1$ は偶数である

したがって，項の個数は偶数であるから，両端から 2 個ずつ組み合わせると

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{m-1}&=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m-2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{m-3}\right)+\cdots\cdots\\&\qquad\cdots\cdots+\left(\frac{1}{\frac{m-1}{2}}+\frac{1}{\frac{m+1}{2}}\right)\\&=\frac{m}{m-1}+\frac{m}{2(m-2)}+\frac{m}{3(m-3)}+\cdots\cdots+\frac{m}{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m+1}{2}}\\&=m\left\{\frac{1}{m-1}+\frac{1}{2(m-2)}+\frac{1}{3(m-3)}+\cdots\cdots+\frac{4}{(m-1)(m+1)}\right\}\end{aligned}$$

m は 3 以上の素数であるから，{ } 内の和の分母に現れる因数のどれとも約分されることがない

よって，E は m の倍数である

(4)
$$\begin{aligned}\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}&=\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)\\&=\frac{19}{7\cdot12}+\frac{19}{8\cdot11}+\frac{19}{9\cdot10}\\&=19\left(\frac{1}{7\cdot12}+\frac{1}{8\cdot11}+\frac{1}{9\cdot10}\right)\end{aligned}$$

19 は素数であるから，（ ）内の和の分母に現れる因数のどれとも約分されることがない

よって，G は 19 の倍数である

(5) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots-\frac{1}{2012}$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2012}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2012}\right)$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2012}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1006}\right)$

$=\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+\frac{1}{1009}+\cdots\cdots+\frac{1}{2012}$

$=\left(\frac{1}{1007}+\frac{1}{2012}\right)+\left(\frac{1}{1008}+\frac{1}{2011}\right)+\left(\frac{1}{1009}+\frac{1}{2010}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{1509}+\frac{1}{1510}\right)$

$=\frac{3019}{1007\cdot2012}+\frac{3019}{1008\cdot2011}+\frac{3019}{1009\cdot2010}+\cdots\cdots+\frac{3019}{1509\cdot1510}$

$=3019\left(\frac{1}{1007\cdot2012}+\frac{1}{1008\cdot2011}+\frac{1}{1009\cdot2010}+\cdots\cdots+\frac{1}{1509\cdot1510}\right)$

3019 は素数であるから，通分して得られる和の分母と約分されることがない

よって，J は 3019 の倍数である

(6) (5)と同様にして

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots-\frac{1}{4n}$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n}\right)$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n}$

$=\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{4n}\right)+\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{4n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{4n-2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)$

$=\frac{6n+1}{(2n+1)\cdot4n}+\frac{6n+1}{(2n+2)(4n-1)}+\frac{6n+1}{(2n+3)(4n-2)}+\cdots\cdots+\frac{6n+1}{3n(3n+1)}$

$=(6n+1)\left\{\frac{1}{(2n+1)\cdot4n}+\frac{1}{(2n+2)(4n-1)}+\frac{1}{(2n+3)(4n-2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{3n(3n+1)}\right\}$

条件より，$6n+1$ は素数であるから，通分して得られる和の分母と約分されることがない

よって，L は $6n+1$ の倍数である