数学コンテスト終了後に配布した「解答と解説」の解答例に誤りがありました。謹んでお詫び申し上げます。本編の解答例を参考にしてください。

配点

(1)(2)　各４点　　(3)　３点　　(4)　６点　　(5)　９点　　(6)　８点　　(7)　６点

講評

全受験者 164 名中，各設問ごとの正答者数は，(1)が 85 名，(2)が 35 名，(3)が 66 名，(4)が 2 名，(5)(6)(7)が 0 名でした。第５問での得点が 20 点以上だった受験者は，旭川東高　蘆田君が 30 点，帯広柏葉高　合浦君が 24 点，札幌南高　沼澤君が 23 点，旭川東高　清水君が 20 点で，計 4 名でした。栄誉を称えたいと思います。

(1)　図形の問題となると，苦手意識を持っている人も多いのではないでしょうか，BG は重心の性質を知っていれば解けますね。BG が △BCD の外接円の半径ということを利用して解いている人も多かったようです。AHは，G と H が一致します。あとは三平方の定理で解けますね。

(2)　これもオーソドックスな問題と思います。しかし，V は多くの人が求めているのですが，r は正答者が少なかったように思います。解答例のように解くのが一般的だと思いますが，
AG′ : G′H＝3 : 1 として，G′H＝r からも求められます。ベクトルを用いた 3 : 1 の説明については，下記の参考を見てください。四面体の重心を三角形の重心と同じと考えてしまい，
AG′ : G′H＝2 : 1 としてしまった答案もいくつか見かけました。なお，相似を利用してうまく計算している答案もありました。

【参考】　正四面体ABCD の重心 G′ は，対称性を考えることより

$$\overrightarrow{\mathrm{G'A}}+\overrightarrow{\mathrm{G'B}}+\overrightarrow{\mathrm{G'C}}+\overrightarrow{\mathrm{G'D}}=\vec{0} \quad \cdots ①$$　を満たす

ここで，任意の点O に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{G'A}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OG'}},\ \overrightarrow{\mathrm{G'B}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OG'}},\ \overrightarrow{\mathrm{G'C}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OG'}},\ \overrightarrow{\mathrm{G'D}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OG'}}$$

が成り立つので，①は　$\overrightarrow{\mathrm{OG'}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{4}$　と変形できる

$\overrightarrow{\mathrm{OG'}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}}{4}$　とすると，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}$ は△BCD の重心の位置ベクトルを表すので，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とすることができ，$\overrightarrow{\mathrm{OG'}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{4}$ が得られる

以上のことから，G′ は線分AG を 3 : 1 に内分する点であることがわかる

(3)　問題集によくある問題なので，(2)より正答率が上がっています。解答例のように余弦定理を使うのが一般的ですが，別解のように余弦そのものの性質を使った方が計算は簡単に済みますね。そのように解いている人もいました。

(4)　l_1 については，G′ が移動した距離で，G′ は円弧上を移動するのですが，真上から見た第１包囲図で正六角形の周の長さを求め，$l_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\cdot 6=2\sqrt{2}\,a$ としている人が多かったように思います。
S_1 については約２割の人ができていたようです。また，正四面体を回転させたときの底面にくる数字は実際に正四面体を作り，回転させてみて答えてもらえばよかったのですが，そこまで手が回らなかった人も多かったようです。

(5)　(4)と同様に重心が移動した距離なのですが，真上から見た第２包囲図（１つの正六角形を７つの正六角形が囲んでいる）の周の長さを求め，$l_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\cdot 18=6\sqrt{2}\,a$ としている人が多かったように思います。S_2 については数名の人ができていたようです。

(6)　l_n については，単位となる弧が $6=6\cdot 1$ 個，$18=6\cdot 3$ 個，$30=6\cdot 5$ 個，…，$6(2n-1)$ 個となるので，$6(2n-1)$ 倍すればよいだけです。また，S_n については，単位となる正六角形を 1 個，6 個，12 個，18 個，…，$6(n-1)$ 個と加えていけばよいので，数学Ｂで学ぶ数列の和（Σ）を用いると楽に求められますが，数列を学んでいなくても

$$
\begin{aligned}
&1+6+12+18+\cdots+6(n-1)\\
&\quad=1+6\{0+1+2+3+\cdots+(n-1)\}\\
&\quad=1+6\cdot\frac{1}{2}\{0+1+2+3+\cdots+(n-1)+(n-1)+\cdots+2+1+0\}\\
&\quad=1+3[\{0+(n-1)\}+\{1+(n-2)\}+\{2+(n-3)\}+\cdots+\{(n-2)+1\}+\{(n-1)+0\}]\\
&\quad=1+3\{(n-1)+(n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1)\}\\
&\quad=1+3n(n-1)=3n^2-3n+1
\end{aligned}
$$

のように工夫すればよいと思います。

(7)　ほとんどの人が何を問われているのか見当もつかなかったでしょう。すみません。そんな中，旭川東高　蘆田君は，図はほぼできていたのではないでしょうか。惜しかったですね。解答例を参考にもう一度考えてみてください。

生クリームについては，$a=10\text{cm}$ とすると，解答例より $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 10^3=500\sqrt{2}\fallingdotseq 707.1\text{cm}^3$ 必要となります。生クリームは 200mg 程度で 200～300 円程度ですから，題意のような形で市販の生クリームを使うと 1 個あたり 800 円程度かかるようです。

現代の政治や社会に象徴されるように，一般に私たちは，目の前のことは時間をかけて議論するけれども，見えない部分は知らん顔という状況に陥りがちです。数学はそのような隠された部分を解き明かすという面白味があるように思います。また，解き明かす努力をすることによって，次第に思考力や洞察力が培われていくのだと思います。

今回納得のいく結果を得られなかった諸君も決して落胆することなく，学習を続け，力をつけていくことを願っています。何かに挑戦する姿勢そのものが，今求められていて，しかも，生涯にわたって必要で大切なものだと思います。今回の受験生諸君みんなに未来があり，それぞれにすべきことがあり，次代は君たちにかかっています。受験生諸君の未来に幸あれ！

問題作成や解答，解説，講評作成には多くの先生にご助言を頂きました。この場をかりて，お礼申し上げます。

北海道札幌東陵高等学校　前田勝利