$\boxed{\text{配点}}$

(1)(2)　各４点　　(3)　８点　　(4)(5)　各１２点

$\boxed{\text{講評}}$

０点の答案が多く出ました。おそらく，このような「関数方程式の問題」を解いた経験がないように思います。関数方程式の問題では，$f(0)$ の値を求めることや、奇関数または偶関数の証明，$f(x)$ の次数を求めることはよくある設問です。最終的には，$f(x)$を求めることが目標となっています。まだ関数方程式を勉強したことのない生徒は，この機会に勉強してください。

代表的な関数方程式としては，$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f(xy)=f(x)+f(y)$ 等があります。

皆さんの答案についてですが，不正解となった解答の中には，関数 $f(x)$ を勝手に２次関数や整式と決めてかかって解いていた答案がありました。(1)～(3)の設問では $f(x)$ は整式という条件はありません。当たり前のことですが，与えられた条件のみを用いて解答してください。また，(1)については，答だけ書いている答案もありましたが，説明や途中計算を必ず書いてください。

ところで，この問題の関数方程式（※）については，２回まで微分可能であれば次のように $f(x)$ を求めることができます。（数学Ⅲの範囲）

（※）について x を定数とみて，y について微分すると

$$f'(x+y)-f'(x-y)=2f(y) \quad \cdots\cdots\cdots①$$

①に $y=0$ を代入すると

$$f'(x)-f'(x)=2f(0)$$

ゆえに　$f'(0)=0$

①について x を定数とみて，y について微分すると

$$f''(x+y)+f''(x-y)=2f''(y) \quad \cdots\cdots\cdots②$$

②に $y=0$ を代入すると

$$f''(x)=f''(0)=\text{定数}$$

となるので

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$f(0)=0$，$f'(0)=0$ より，$b=0$，$c=0$

よって，　$f(x)=ax^2$

(5)の設問について，b の値によっての場合分けが必要なことと，その後の方程式の扱い方が難しく，正解にたどり着いた答案はありませんでした。一番正解に近かった解答は，札幌国際情報　高辻君でした。完璧な解答まではもう少しのところでしたが，非常に良く考えてくれた解答でした。

最後に，(5)の設問の作問と解答は双葉高校の古田和幸先生です。感謝しています。

北海道岩見沢東高等学校　大和達也