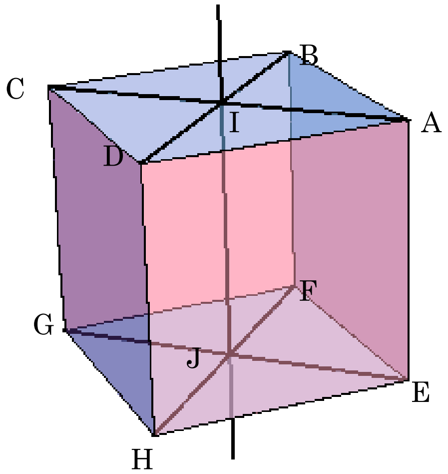
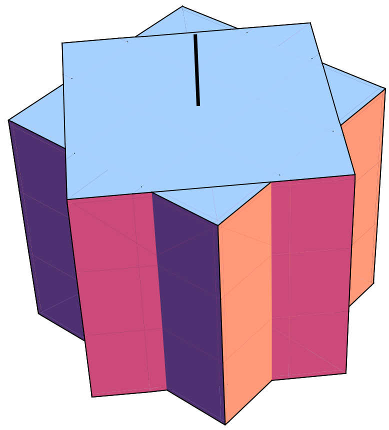
問題５

下図（Fig－1）のように１辺の長さが１の立方体 ABCD-EFGH がある。上面の正方形 ABCD において A と C，B と D を通る線分の交点を I，底面の正方形 EFGH において E と G，F と H を通る線分の交点を J とする。

(1) 直線 IJ を回転軸として 45° 回転した立方体と回転前の立方体を合成した立体（Fig－2）の表面積を求めよ。

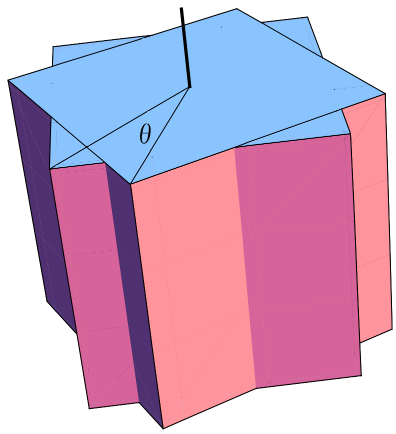


（Fig－1）



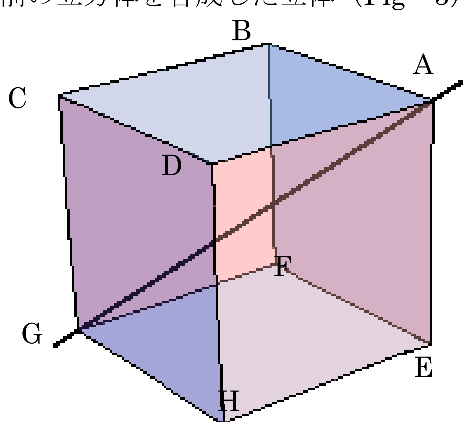
（Fig－2）

(2) 直線 IJ を回転軸として θ 回転した立方体と回転前の立方体を合成した立体（Fig－3）の表面積を θ で表せ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ 。

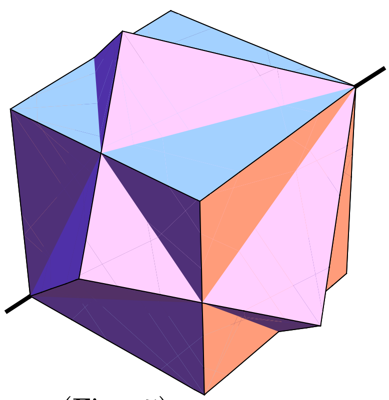


（Fig－3）

(3) 立方体 ABCD-EFGH（Fig－4）において直線 AG を回転軸として 60° 回転した立方体と回転前の立方体を合成した立体（Fig－5）の表面積を求めよ。

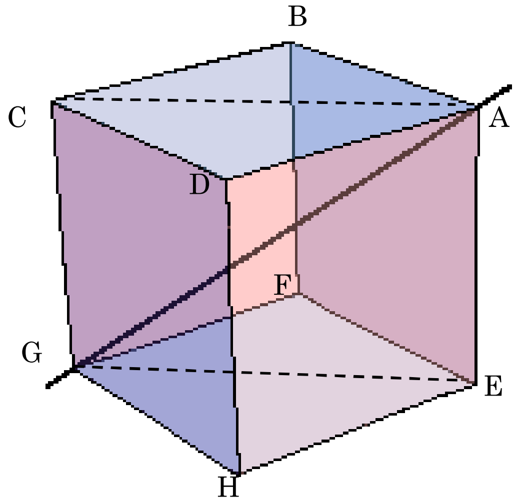


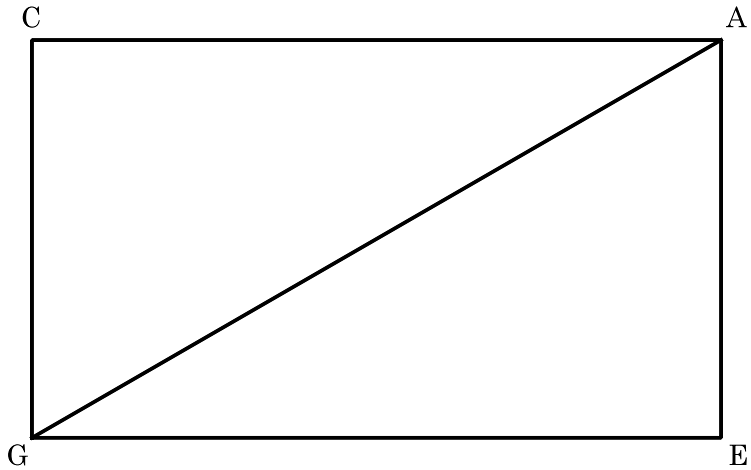
（Fig－4）



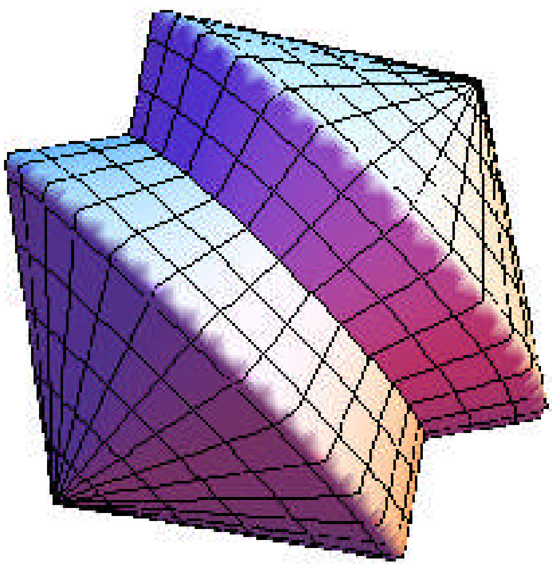
（Fig－5）

(4) 立方体 ABCD-EFGH において, 直線 AG を含む長方形 ACGE だけを切り取る。長方形 ACGE（Fig－6）を，AG を回転軸として 1 回転してできる回転体（Fig－7）の体積を求めよ。





長方形 ACGE（Fig－6↑）回転体（Fig－7↓）



着眼点

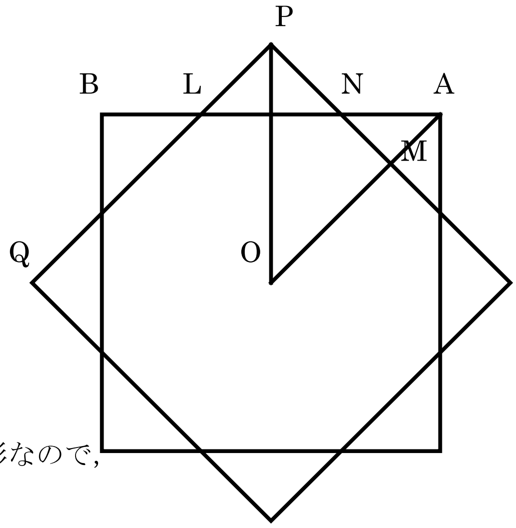
３次元空間の立体把握を行う問題です。

展開図を自分で作成して，模型を作り考えることも大切ですが，今回は「仮想実験」をテーマにしました。模型や実験を，自らの頭脳のなかで，空想しながら，仮説を打ちたてる問題になれば面白いと考えました。アインシュタイン博士も「仮想実験」を行いながら相対性理論を完成したと，言われています。実際の回転体など，作成には困難がありますが，若い頭脳で「仮想実験」をしながら，自分の考えをまとめて下さい。

解答例

(1) 側面の面積を求める。

45°回転した上面の正方形と回転前の正方形を重ねて図示する。



△OPQ は直角二等辺三角形なので，

$OP = OA = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ …①

∠POA=45°なので対称性により，∠OPM＝45°

△OMP も直角二等辺三角形なので，

$OM = PM = \dfrac{1}{2}$ …②

$MA = OA - OM = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

△MAN において

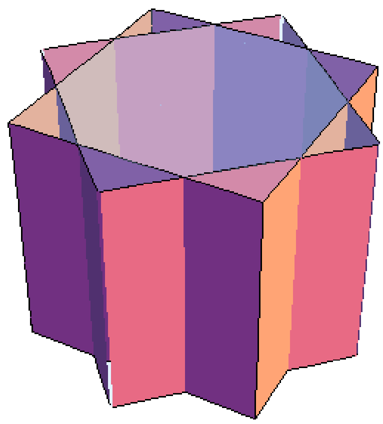
∠MAN＝∠MNA＝45°より△MAN も直角二等辺三角形となるので，

$NA = \sqrt{2}MA = \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ …（＊）

$NA + NP + PL + LB = 4NA = 4 \times \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2}$

この多角形の周囲の長さ＝$4\times\left(4-2\sqrt{2}\right)$

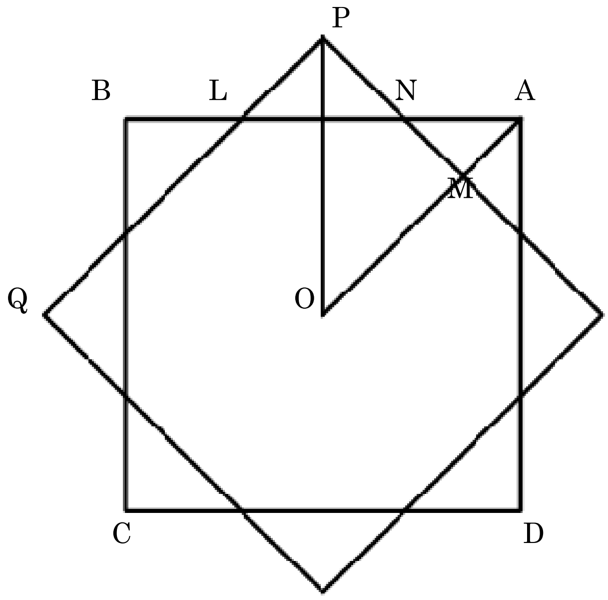
側面積＝高さ×多角形の周囲＝$4\left(4-2\sqrt{2}\right)$…③



（側面の形状↑）

上面と下面の面積を求める。
△PLN は直角二等辺三角形なので，
△PLN の面積

$$=\frac{1}{2}PN^2=\frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \quad \cdots ④$$



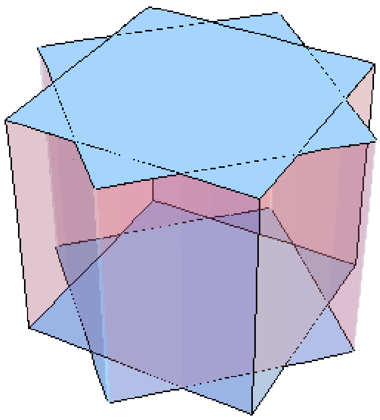
上面の多角形の面積
＝正方形 ABCD＋4△PLN

$$=1+4\times\frac{3-2\sqrt{2}}{4}=4-2\sqrt{2}$$

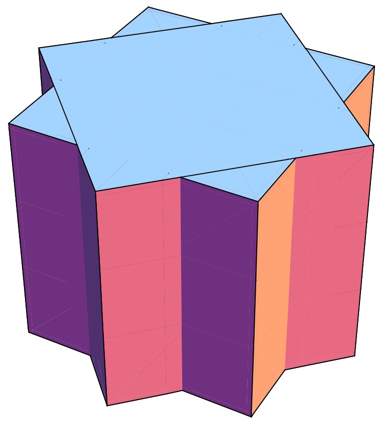
③④より
求める表面積＝側面積＋2×上面の面積

$$=4\left(4-2\sqrt{2}\right)+2\left(4-2\sqrt{2}\right)$$

$$=12\left(2-\sqrt{2}\right) \cdots \text{（答）}$$



（上面と下面の形状↑）



（表面積の形状↑）

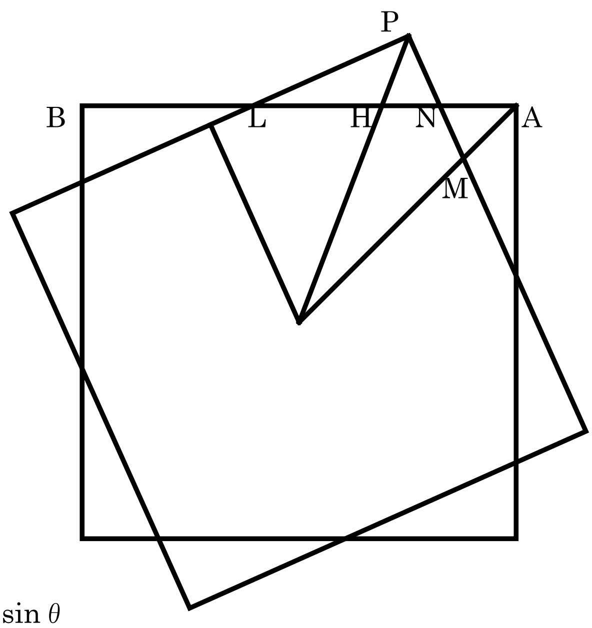
(2)

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

より∠PLH＝θ v

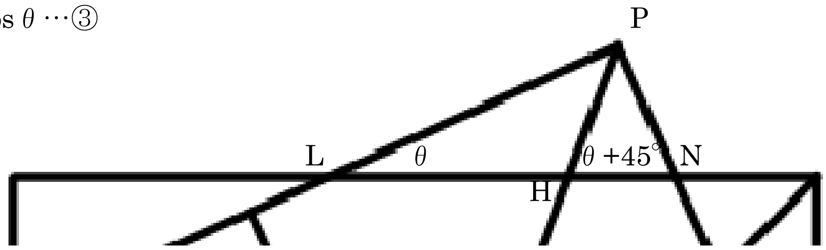
$$OP=OA=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

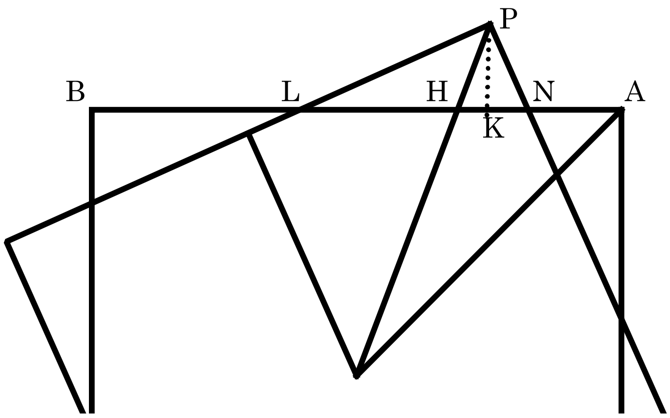
より
∠LPH=45°　より△PLH の外角が∠PHN なので，
∠PHN＝θ＋45°
PL，BL，PN，NA を θ で表示する。
∠LPH=∠HPN=45°
△PLN において，
LP＝LNcos θ
NP＝LNsin θ



角の二等分線の定理より，
LP：NP＝LH：HN＝LNcos θ ：LNsin θ ＝cos θ ：sin θ

LPsin θ ＝NPcos θ …③





図形の対称性より，
BL=LP，NP=NA
LK＝LPcos θ ＝BLcos θ
KN＝PNsin θ ＝NAsin θ
BL＋LN＋NA＝1
BL＋LK＋KN＋NA＝1
BL＝LP，NA＝NP
LP（1＋cos θ）＋NP（1＋sin θ）＝1
③を代入

$$\frac{\cos\theta\left(1+\cos\theta\right)}{\sin\theta}NP+NP\left(1+\sin\theta\right)=1$$

$$\left\{1+\sin\theta+\frac{\cos\theta\left(1+\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right\}NP=1$$

$$\frac{\sin\theta+\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta}NP=1$$

$$\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}NP=1$$

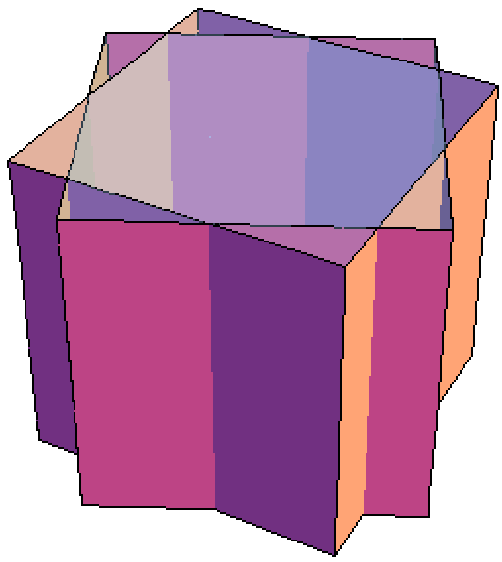
$$\therefore NP=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\cdots\cdots ④$$

$$LP=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}NP$$

$$LP=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

$$LP=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\cdots\cdots ⑤$$

$$NP+LP=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta++\cos\theta}$$



（側面の形状↑）

$$BL+LP+NP+NA=2\left(NP+LP\right)=\frac{2\left(\sin\theta+\cos\theta\right)}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

この多角形の長さ
＝4（BL+LP+NP+NA）

$$=\frac{8\left(\sin\theta+\cos\theta\right)}{1+\sin\theta+\cos\theta}\cdots\cdots ⑥$$

上面と下面の面積を求める。
△PLN の面積を求める
△PLN において，

$\cos\theta = \dfrac{LP}{LN}$,

$LN = \dfrac{LP}{\cos\theta}$

△PLK において,

$\sin\theta = \dfrac{PK}{PL}$

$PK = PL\sin\theta$

$PL = LP = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

$NP = \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

底辺 $= LN = \dfrac{LP}{\cos\theta} = \dfrac{1}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

高さ $= PK = LP\sin\theta = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

△PLN の面積

$$= \frac{1}{2}LN\times PK = \frac{\sin\theta\cos\theta}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

上面の面積＝正方形 ABCD＋4△PLN

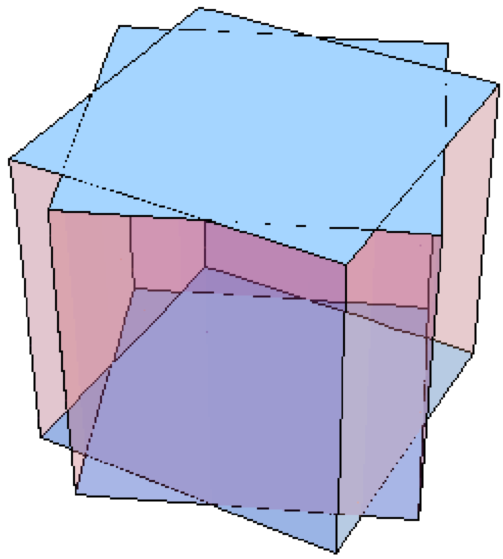
$$= 1+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2} \quad \cdots⑦$$

求める表面積＝

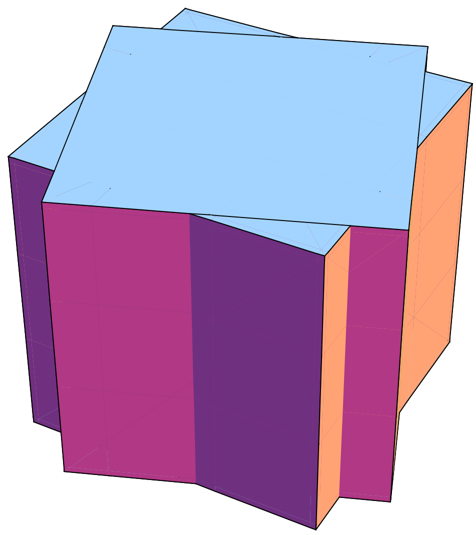
$$\frac{8(\sin\theta+\cos\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta}+2+\frac{4\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

通分してまとめると,

$$=\frac{12(\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1)}{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2} \quad \cdots（答）$$



（上面と下面の形状↑）



（0＜θ＜45°　のときの表面積↑）

(3)1 つの面 ABCD について

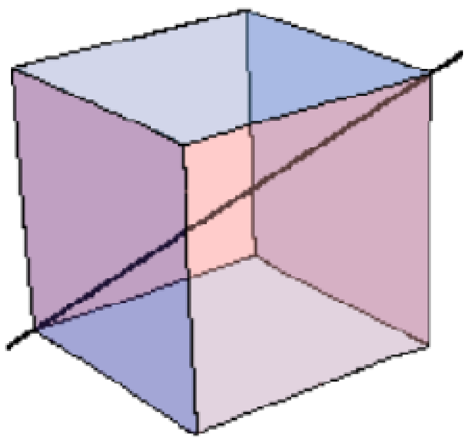
AS＝1

$BT = TC = CU = UD = \dfrac{1}{2}$

$SU = ST = \dfrac{1}{2}$

$UT = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$AU^2 = UD^2 + AD^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{5}{4}$



$\therefore AU = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

△ADU の面積＝△ASU の面積＝△AST の面積＝△ABT の面積

$= \dfrac{1}{2} UD \times AD = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{4}$

△CUT の面積＝△SUT の面積

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

1 つの面の表面積

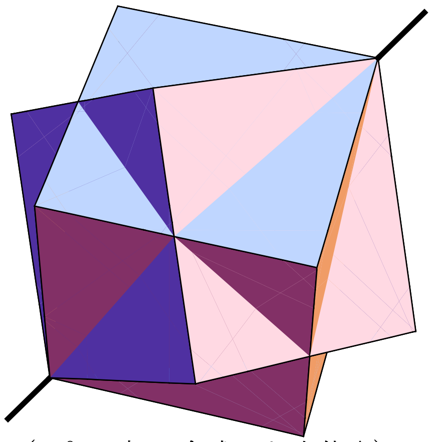
＝△ADU の面積×4＋△CUT の面積×2

$= \dfrac{4}{4} + \dfrac{2}{8} = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$

この面が 6 個存在するので

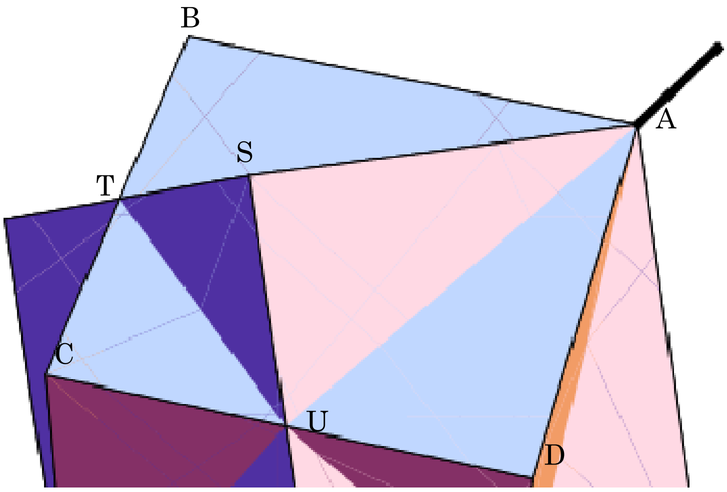
求める表面積

$= \dfrac{5}{4} \times 6 = \dfrac{30}{4} = \dfrac{15}{2}$



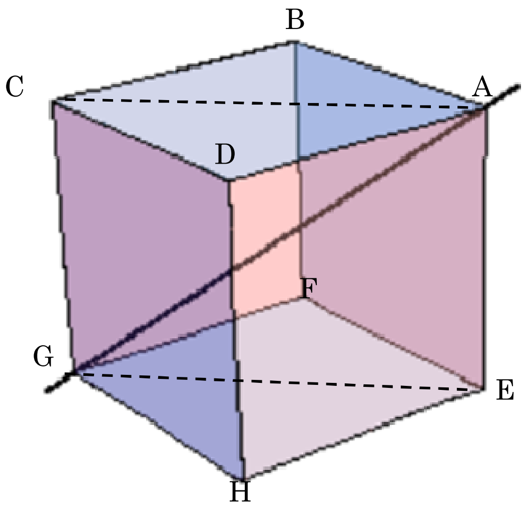
(60°回転し合成した立体↑)

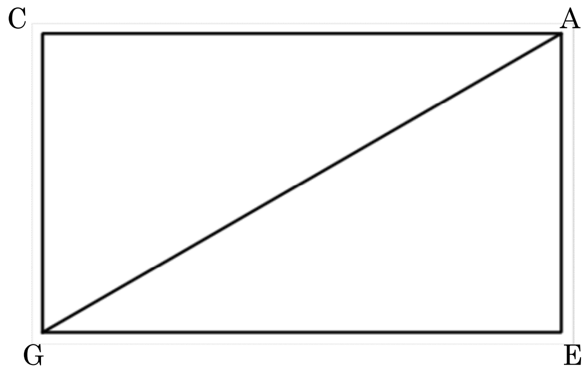
（上面を close Up↓）



(4)

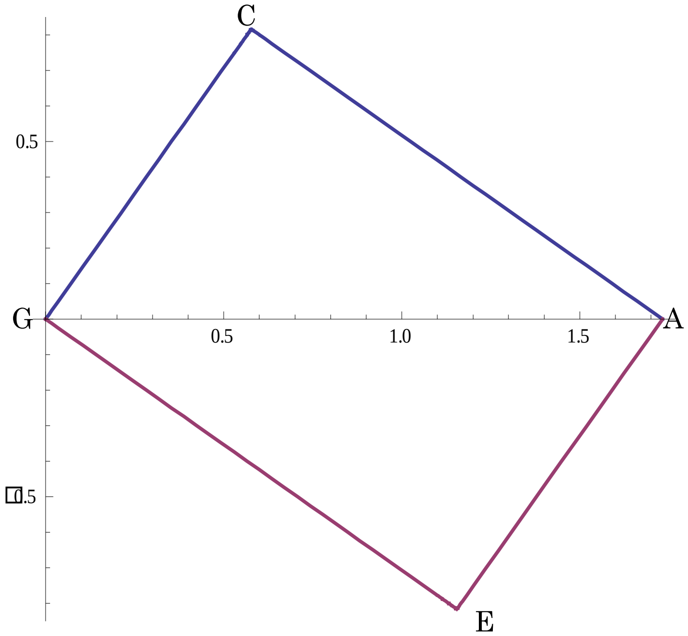
切断された長方形 ACGE（Fig－6）は，対角線 AG を軸として，回転する。





（Fig－6↑）

線分 AG を，x 軸にとる。



$CG=1, AC=\sqrt{2}, AC^2+CG^2=AG^2$ より

$AG=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$

G を原点 O

$A\left(\sqrt{3},0\right)$ として，xy 平面上に断面を表示する。

∠AGC＝α とする

$\tan\alpha=\dfrac{AC}{CG}=\sqrt{2}$

$\tan\alpha=\sqrt{2}$ より

$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

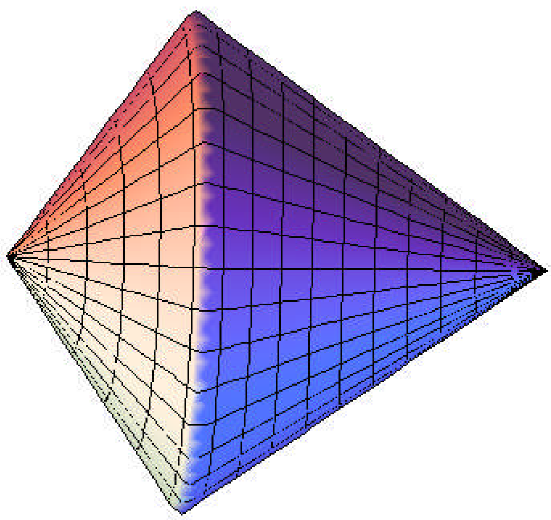
$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$C\left(CG\cos\alpha,CG\sin\alpha\right)$

CG=1 なので

$C\left(\cos\alpha.\sin\alpha\right)$

$C\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$



直角三角形△CGA を線分 AG を回転軸として回転した立体の体積を求める。

2 つの円錐を合併した立体なので

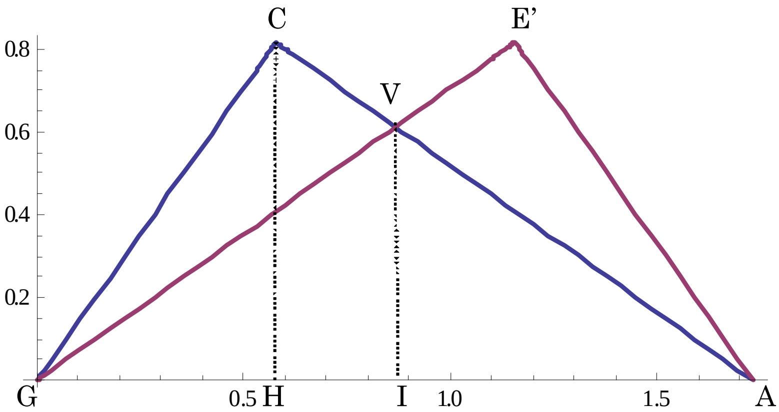
$$\frac{1}{3}\pi\times CH^2\times GH+\frac{1}{3}\pi\times CH^2\times HA=\frac{\pi\times CH^2}{3}\left(GH+HA\right)$$

$CH=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},GH+HA=GA=\sqrt{3}$ を代入

$$\frac{1}{3}\pi\times CH^2\times GH+\frac{1}{3}\pi\times CH^2\times HA=\frac{\pi}{3}\times\frac{2}{3}\times\sqrt{3}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

線分 CA と E'G の交点を V とする。

直線 CA において∠xAC＝90°＋α より



$$\tan xAC = \tan(\alpha + 90°) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$A(\sqrt{3},0)$ を通り，傾き $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ の直線

$$AC : y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\sqrt{3}) \cdots ⑦$$

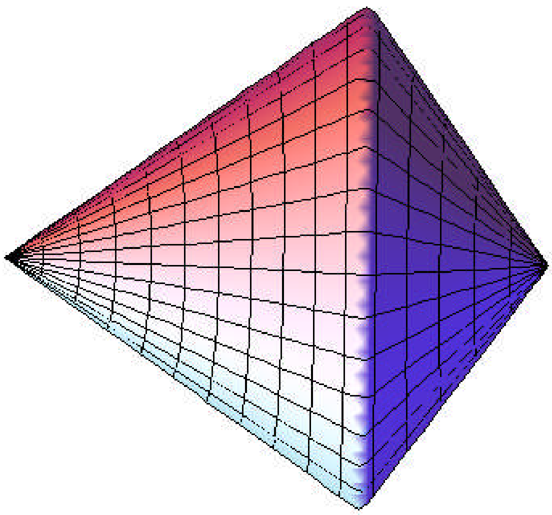
△AE'G において
∠GAE'＝∠AGC＝α より
∠E'GA＝90°－α

$$\tan\angle AGE' = \tan(90°-\alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$GE' : y = \frac{1}{\sqrt{2}}x \cdots ⑧$$

線分 GE'と AC との交点 V とすると

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x \end{cases}$$ を連立して解くと



$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$$

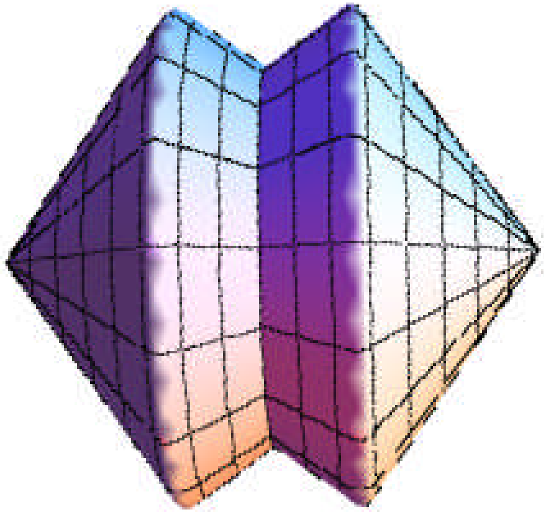
△VGA を直線 GA を軸として回転させてできる立体の体積を求める。
点 V から x 軸へ垂線を下ろした点を I とおく
2 つの円錐を合併した立体なので，

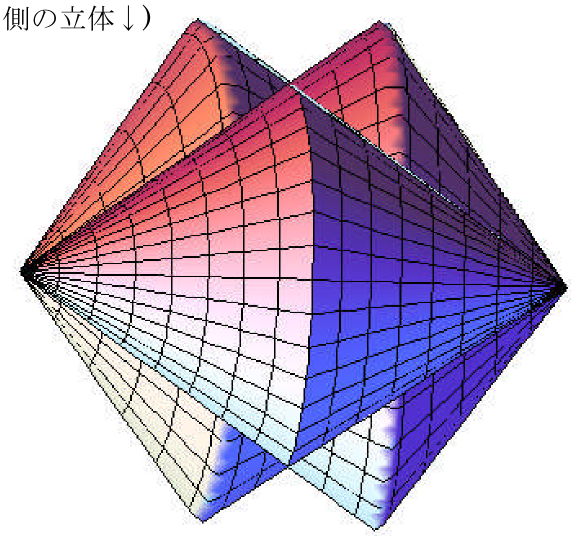
$$\frac{1}{3}\pi\times(VI)^2\times GA = \frac{\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2\times\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}$$

よって求める回転立体の体積は

$$\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}\pi}{8} = \frac{23\sqrt{3}\pi}{72}$$

(内側の立体↓)





（求める立体の形状↑）ヤクルトの容器に似ている。

講評

昨年の「折り紙ステント」の問題は，正解者が０人だったので，今年は，１，２年生にも正解者が多数生まれるような問題を考えました。

今年のテーマは，「回転体」にしました。

数学Ⅲには，積分により回転体の体積を求める分野がありますが，まずは，表面積を求め，簡単な平面図形を回転させた立体の体積を求める問題にしました。

採点を終えて気がついたこと

①論理的な答案が書かれていない。この答えは，どのような思考で導かれたのかが，記述されていない。超能力で答えしか記述していない。

②作図が不明確で，どのような方針で，この解答を作成したのか。図形の中の文字の活用方法も不明確であり，文字による表現力が不足している。

③具体的な数字や値の与えられている時はよいが，「一般化」ができない。現象を一般的に拡張して思考できない答案。

反面，素晴らしい答案にも多く出会うことができました。

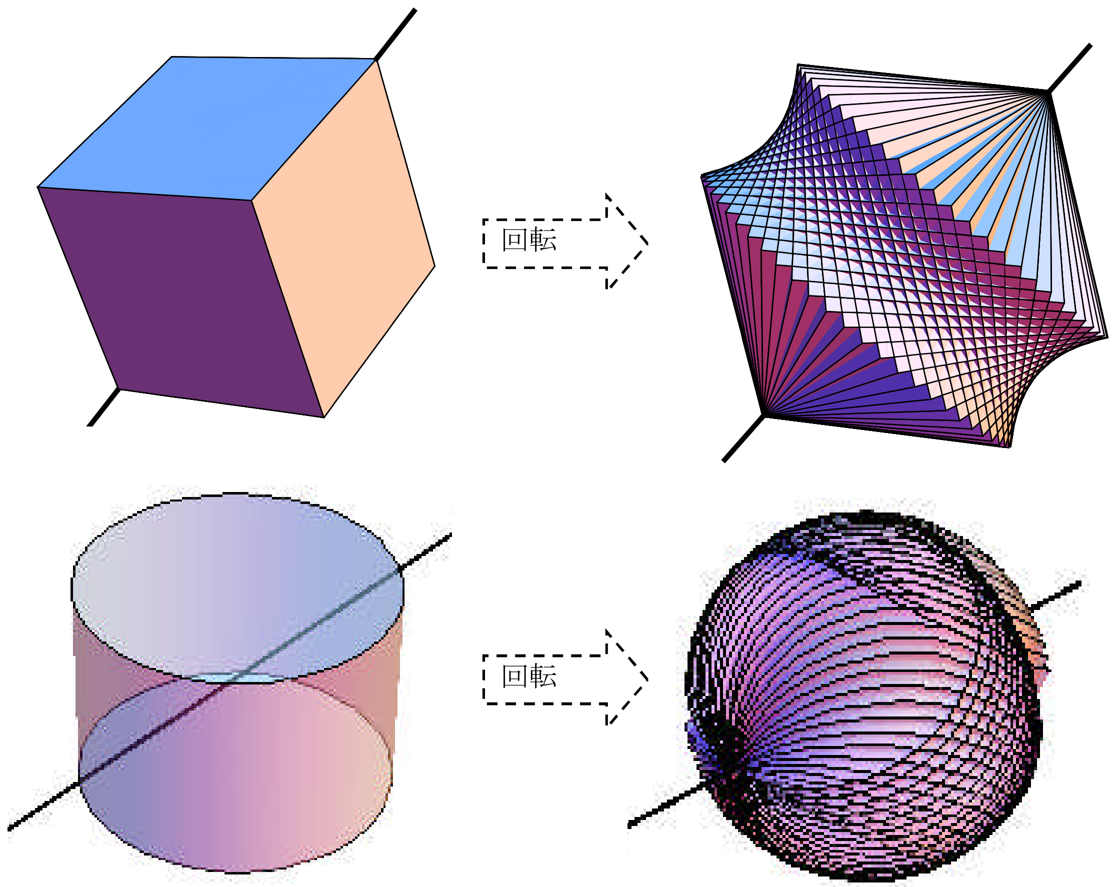
①作図が理解し易い。

②計算はミスしているが，方針がきちんとしている。

釧路湖陵高校の赤司さんの解答は，ほぼ完璧な見事な解答でした。

今回は，長方形の回転を出題しましたが，いろいろな立体を回転させると，面白い図形が完成します。

（北海道札幌北高等学校　松本睦郎）


回転
回転