問題４

$x>0$ で定義された関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき，下の問いに答えよ。

条件：(ⅰ)　$f(x)>0$，　$f(1)=1$

(ⅱ)　$f(x+1)=xf(x)$

(ⅲ)　$2 \leqq x<y$ ならば，$f(x)<f(y)$

(1)　$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，$f(5)$，$f(6)$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　自然数 n に対して，$f(n+1)=n!$ であることを示せ。

(3)　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=A$ とおく。自然数 n に対して，

$$f\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}A$$

となることを示せ。

さらに，関数 $f(x)$ は条件：(ⅳ)　$\dfrac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}>\sqrt{x-\dfrac{1}{4}}$　$(x \geqq 2)$ を満たす。そのとき，

(4)　(3) と合わせて，自然数 $n \geqq 2$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{4n+1}{4(2n+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)<\frac{1}{A^2}$$
$$<\frac{2n-1}{4n-1}\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{(2n-2)^2}\right)$$

実数 X に対して，3 乗して X になる実数を $\sqrt[3]{X}$（3 乗根 X と読む）で表すこととする。

さらに，関数 $f(x)$ が条件：(ⅴ)　$\dfrac{f\left(x+\frac{1}{3}\right)}{f(x)}>\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{3}}$　$(x \geqq 2)$ を満たす。そのとき，

(5)　$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=B$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=C$ とおく。自然数 $n \geqq 2$ に対して，

$$\frac{n}{3(3n+1)}\cdot\left(1-\frac{11}{3^3}\right)\left(1-\frac{20}{6^3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{9n+2}{(3n)^3}\right)<\frac{1}{B^3}$$
$$<\frac{3n-2}{9(3n-1)}\cdot\left(1-\frac{11}{3^3}\right)\left(1-\frac{20}{6^3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{9(n-1)+2}{(3n-3)^3}\right)$$

また，

$$\frac{2(3n+1)}{3(3n+2)}\cdot\left(1-\frac{7}{3^3}\right)\left(1-\frac{16}{6^3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{9n-2}{(3n)^3}\right)<\frac{1}{C^3}$$
$$<\frac{2(3n-1)}{9n}\cdot\left(1-\frac{7}{3^3}\right)\left(1-\frac{16}{6^3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{9(n-1)-2}{(3n-3)^3}\right)$$

となることを示せ。

着眼点

(1)は，条件(ⅰ)，(ⅱ)を用いる。(2)の証明は，(1)で求めた手法をどう一般化するかです。

(3)は，条件(ⅱ)のみを用いるが，(2)の手法を延長するが，少し難しい。

(4)，(5)は，応用である。出来た人は大いに自信を持ってよい。

これは特殊関数である「ガンマ関数 $\Gamma(s)$」についての問題である。

ちなみに，極限をとって，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}=1.77245385090551\cdots$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=2.67893853470774\cdots$，

$f\left(\frac{2}{3}\right)=1.35411793942640\cdots$，$f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=3.6275987\cdots$ となる。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1) $f(2)=f(1+1)=1\cdot f(1)=1\cdot 1=1$

$f(3)=f(2+1)=2\cdot f(2)=2\cdot 1=2$

$f(4)=f(3+1)=3\cdot f(3)=3\cdot 2=6$

$f(5)=f(4+1)=4\cdot f(4)=4\cdot 6=24$

$f(6)=f(5+1)=5\cdot f(5)=5\cdot 24=120$

(2)
$$
\begin{aligned}
f(n+1)&=nf(n)\\
&=n(n-1)f(n-1)\\
&=n(n-1)(n-2)f(n-2)\\
&=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2f(2)\\
&=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1\cdot f(1)\\
&=n!
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
f\left(n+\frac{1}{2}\right)&=\left(n-\frac{1}{2}\right)f\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)f\left(n-\frac{3}{2}\right)\\
&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{5}{2}\right)f\left(n-\frac{5}{2}\right)\\
&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}A
\end{aligned}
$$

(4)
$$\sqrt{n-\frac{1}{4}}\,f(n)<f\left(n+\frac{1}{2}\right)<\frac{f(n+1)}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}}$$

$$\sqrt{n-\frac{1}{4}}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}A<\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}}$$

$$2\sqrt{n-\frac{1}{4}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}<A<\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}$$

逆数をとって平方すると，

$$\left(n+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}<\frac{1}{A^2}<\frac{1}{4n-1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{5^2}{4^2}\cdot\frac{7^2}{6^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)^2}$$

$$\frac{n+\frac{1}{4}}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}<\frac{1}{A^2}$$

$$<\frac{2n-1}{4n-1}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2}$$

いま，$\dfrac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}=\dfrac{(2k)^2-1}{(2k)^2}=1-\dfrac{1}{(2k)^2}$ であるから，

$$\frac{4n+1}{4(2n+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)<\frac{1}{A^2}$$

$$<\frac{2n-1}{4n-1}\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{(2n-2)^2}\right)$$

(5) $\sqrt[3]{n-\frac{1}{3}}\,f(n)<f\left(n+\frac{1}{3}\right)<\dfrac{f(n+1)}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+\frac{1}{3}}}$ が成り立つから，

$$\sqrt[3]{n-\frac{1}{3}}\cdot(n-1)!<\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{3^n}B<\frac{n!}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+\frac{1}{3}}}$$

$$3\sqrt[3]{n-\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-3}{3n-2}<B<\frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+\frac{1}{3}}}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{9}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-2}$$

逆数をとって 3 乗すると，

$$n\left(n+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1^3}{3^3}\cdot\frac{4^3}{6^3}\cdot\frac{7^3}{9^3}\cdot\cdots\cdot\frac{(3n-2)^3}{(3n)^3}<\frac{1}{B^3}<\frac{1}{27\left(n-\frac{1}{3}\right)}\cdot\frac{4^3}{3^3}\cdot\frac{7^3}{6^3}\cdot\frac{10^3}{9^3}\cdot\cdots\cdot\frac{(3n-2)^3}{(3n-3)^3}$$

いま，$(3k-2)(3k+1)^2=27k^3-9k-2$ より，$\dfrac{(3k-2)(3k+1)^2}{(3k)^3}=1-\dfrac{9k+2}{(3k)^3}$

$$\frac{n\left(n+\frac{1}{3}\right)}{(3n+1)^2}\cdot\frac{1\cdot 4^2}{3^3}\cdot\frac{4\cdot 7^2}{6^3}\cdot\frac{7\cdot 10^2}{9^3}\cdot\cdots\cdot\frac{(3n-2)(3n+1)^2}{(3n)^3}<\frac{1}{B^3}$$

$$<\frac{3n-2}{9(3n-1)}\cdot\frac{1\cdot 4^2}{3^3}\cdot\frac{4\cdot 7^2}{6^3}\cdot\frac{7\cdot 10^2}{9^3}\cdot\cdots\cdot\frac{(3n-5)(3n-2)^2}{(3n-3)^3}$$

ゆえに，

$$\frac{n}{3(3n+1)}\cdot\left(1-\frac{11}{3^3}\right)\left(1-\frac{20}{6^3}\right)\left(1-\frac{29}{9^3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{9n+2}{(3n)^3}\right)<\frac{1}{B^3}$$

$$<\frac{3n-2}{9(3n-1)}\cdot\left(1-\frac{11}{3^3}\right)\left(1-\frac{20}{6^3}\right)\left(1-\frac{29}{9^3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{9(n-1)+2}{(3n-3)^3}\right)$$

また，

$$\sqrt[3]{n-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{n}\,f(n)<f\left(n+\frac{2}{3}\right)<\frac{f(n+1)}{\sqrt[3]{n+\frac{1}{3}}}$$

$$\sqrt[3]{n\left(n-\frac{1}{3}\right)}(n-1)!<\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}{3^n}C<\frac{n!}{\sqrt[3]{n+\frac{1}{3}}}$$

$$\sqrt[3]{n\left(n-\frac{1}{3}\right)}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-3}{3n-1}<C<\frac{1}{\sqrt[3]{n+\frac{1}{3}}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{8}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}$$

逆数をとり 3 乗すると，

$$\left(n+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2^3}{3^3}\cdot\frac{5^3}{6^3}\cdot\frac{8^3}{9^3}\cdot\cdots\cdot\frac{(3n-1)^3}{(3n)^3}<\frac{1}{C^3}<\frac{1}{n\left(n-\frac{1}{3}\right)}\cdot\frac{2^3}{3^3}\cdot\frac{5^3}{3^3}\cdot\frac{8^3}{6^3}\cdot\cdots\cdot\frac{(3n-1)^3}{(3n-3)^3}$$

いま，$(3k-1)^2(3k+2)=27k^3-9k+2$ より，$\dfrac{(3k-1)^2(3k+2)}{(3k)^3}=1-\dfrac{9k-2}{(3k)^3}$

$$\frac{2\left(n+\frac{1}{3}\right)}{3n+2}\cdot\frac{2^2\cdot5}{3^3}\cdot\frac{5^2\cdot8}{6^3}\cdot\frac{8^2\cdot11}{9^3}\cdot\cdots\cdot\frac{(3n-1)^2(3n+2)}{(3n)^3}<\frac{1}{C^3}$$

$$<\frac{2(3n-1)^2}{27n\left(n-\frac{1}{3}\right)}\cdot\frac{2^2\cdot5}{3^3}\cdot\frac{5^2\cdot8}{6^3}\cdot\frac{8^2\cdot11}{9^3}\cdot\cdots\cdot\frac{(3n-4)^2(3n-1)}{(3n-3)^3}$$

ゆえに，

$$\frac{2(3n+1)}{3(3n+2)}\cdot\left(1-\frac{7}{3^3}\right)\left(1-\frac{16}{6^3}\right)\left(1-\frac{25}{9^3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{9n-2}{(3n)^3}\right)<\frac{1}{C^3}$$

$$<\frac{2(3n-1)}{9n}\cdot\left(1-\frac{7}{3^3}\right)\left(1-\frac{16}{6^3}\right)\left(1-\frac{25}{9^3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{9(n-1)-2}{(3n-3)^3}\right)$$

配点 (1)　各 2 点　計 10 点　(2)　7 点　(3)　8 点　(4)　7 点　(5)　8 点

講評

(1)　数値が正しければ良しとしました。殆んどの人が出来ています。

(2)　証明は単純でいいと考えていましたが，しかし，論理的でなければいけません。数学的帰納法での証明も同様です。

数学的帰納法を確認しておきましょう。すべての自然数 n に関する命題 $P(n)$ について考えます。

「$P(n)$ が真」$\Leftrightarrow$「$P(1)$ が真，$P(2)$ が真，……」であることを証明する。

ここで，n は自然数を変域とする**変数**と考えていることを確認してください。

そこでまず，

（ i ）　$P(1)$ が真であることを示す。

（ ii ）　**ある自然数** k に対して，$P(k)$ が真であるならば（**帰納法の仮定**），$P(k+1)$ も真である。

（iii）　**ある自然数** k に対して，$1\leqq l\leqq k$ なるすべての自然数 l について，$P(l)$ が真であるならば（**帰納法の仮定**），$P(k+1)$ も真である。

(i), (ii), または, (i), (iii)が示されて，初めて，すべての自然数 n について，$P(n)$ が真であることが証明される。

勿論，最初が 2 から始まる命題でも，2，3，4，… について真であることを証明すればよいから，(i)を「$P(2)$ が真」に変えればよい。そのとき，(ii), (iii)の k は 2 以上であることを忘れずに。

蛇足ですが，$f(n+1)=n\cdot f(n)=n\cdot n-1\cdot f(n-1)$ と書かれると，(　) を付けない無神経さを感じます。

(3)　(2)と同様なのですが，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=A$ を用いる形につなげて結論付けてほしい。

出題者が気になるのは，次のような答案です。

$$f\left(n+\frac{1}{2}\right)=f\left(n-\frac{1}{2}+1\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)f\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{2}A$$

誤りではないのですが，2 行目のところを $\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$ と，行き着く先を明示してほしいのです。

(2)でも，$f(n+1)=n(n-1)\cdot\cdots\cdots\cdot 1\cdot f(1)$ と書いてほしかったのです。

(4)，(5)　式変形が主眼となる問題です。

(4)では，$f(n)<f\left(n+\frac{1}{2}\right)<f(n+1)$ が前提です。ただ，これだけでは A を評価できないのです。

実際に，$(n-1)!<\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{2}A<n!$ からいえることは，

$$\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdots\cdot 3\cdot 1}{2^n\cdot n!}<\frac{1}{A}<\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdots\cdot 3\cdot 1}{2^n\cdot(n-1)!}$$

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n-2}\right)\cdot\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{A}<\frac{2n-1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n-2}\right)\left(1-\frac{1}{2n-4}\right)\cdot\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

となり，$n\to\infty$ のとき，左辺→0，右辺→∞ となり，$n=2$ のときの，$\frac{3}{8}<\frac{1}{A}<\frac{3}{4}$ が最良です。それでは意味がありませんので，**条件**：$\dfrac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}>\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ を付加しました。この条件が正しいか間違いか不明です（正直）。

ただ，$\dfrac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}=g(x)$ とおくと，$g(x)g\left(x+\frac{1}{2}\right)=x$ が成り立つので，

$\sqrt{x-\frac{1}{4}}\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\sqrt{x^2-\frac{1}{16}}<x$ から，$g(x)>\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ で妥当であろうと採用しましたが，結構際どいようです。

(5)では，(4)同様に，$\dfrac{f\left(x+\frac{1}{3}\right)}{f(x)}=h(x)$ とおくと，$h(x)h\left(x+\frac{1}{3}\right)h\left(x+\frac{2}{3}\right)=x$ であるから，

$\sqrt[3]{x-\frac{1}{3}}<h(x)$ であろうと考え，安易？に採用した次第です。しかし，結構いけてる評価だと思っていますが、今一つ自信がありません。

さて，(4)で重要なのは，$\dfrac{(2k+1)(2k-1)}{(2k)^2}=1-\dfrac{1}{(2k)^2}$ と解釈できることです。このことから，

$\dfrac{1}{A^2}$ が評価でき，中森君（札南），林君（札北），相庭君（小樽潮陵），合浦君（帯広柏葉）の解答は，(4)において，見事に解決していました。

この問題は，定数 A，B，C をどれだけ「**速く**」評価するかという自身の課題を具象化したものでした。

(5)において，本来，ガンマ関数 $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$（$z$ の実数部分>0）の定義から，

定数 $A=\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$ を計算するのに，$t=x^2$ と変換し，$A=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ から，

二重積分 $A^2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} re^{-r^2}drd\theta$ として，$A=\sqrt{\pi}$ に達しています。

しかし，具体的に，定数 A，B，C の値を求める段になると手作業でやるしかないのであって，大変な労苦を伴うものです。そこで，上の条件を加えることによって，できるだけ計算手数が少なく，より正確な値が得られる式を捜す過程を出題したのがこの問題でした。結構いい評価が得られたと自負していますが，まだまだかとも思います。

この問題を通して主張していることは，ある定数が存在することは確かですが，それを具体的に求めるのは大変な苦労があることを，知ってほしかったからなのです。

一般に，$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ または $\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)$ の値は，皆さんの研究に委ねたいと思います。ちなみに，

$$\log \Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+\frac{1}{2}\log(2\pi)+2\int_0^{\infty}\frac{\arctan\left(\frac{t}{z}\right)}{e^{2\pi t}-1}dt \quad (z\text{ の実数部分}>0)$$

［Binet の第 2 公式］

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{Cz}\Pi_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \quad (C=0.57721\cdots)$$

などの表示があるので，利用していただきたい。

（北海道札幌開成高等学校　古川政春）