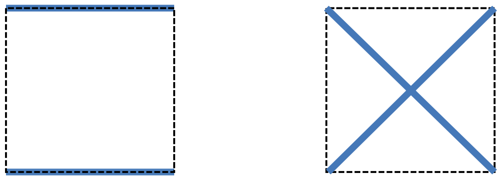
問題１

正方形には辺が 4 本と対角線が 2 本ある。正方形の辺または対角線から，次の条件をみたすように 2 本を選び，それらに色を塗る。

【条件】どの頂点からも色を塗った辺または対角線が 1 本ずつ出ている

このとき，次の 2 通りの塗り方がある。ただし，以下では回転や裏返しにより一致するものは同じであると考えることにする。



（太線が色を塗ったところ）

正 6 角形の辺または対角線について，次の各問いに答えなさい。

(1) 正 6 角形には辺および対角線はそれぞれ何本ずつあるか。

(2) 正 6 角形の辺または対角線から，条件をみたすように 3 本を選び，それらに色を塗る。このとき，色を塗った 3 本の辺または対角線の長さが 3 本とも等しいような例を解答欄の正 6 角形に描きなさい。異なる 2 通りの例を作ること。

(3) (2)で，色を塗った 3 本の辺または対角線のうち，2 本の長さが等しく，1 本の長さのみ異なるような例を解答欄の正 6 角形に描きなさい。異なる 3 通りの例を作ること。

次に，正 8 角形の辺または対角線から，条件をみたすように 4 本を選び，それらに色を塗る。このとき，次の問いに答えなさい。

(4) 色を塗った 4 本の辺または対角線の長さがすべて異なるような例を解答欄の正 8 角形に描きなさい。1 通りの例でよい。

最後に，正 20 角形の辺または対角線から，条件をみたすように 10 本を選び，それらに色を塗る。このとき，次の問いに答えなさい。

(5) 色を塗った 10 本の辺または対角線のうちのいくつかはその長さが等しくなることを証明しなさい。

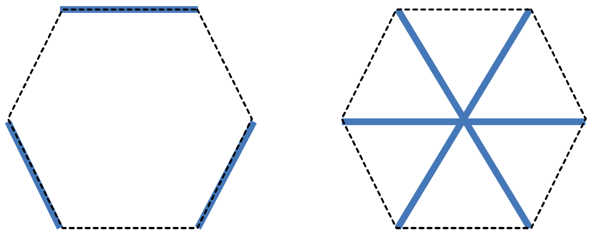
$\boxed{\text{着眼点}}$

(1)は数学 A の教科書にもあるような問題です。(2)(3)も比較的簡単に思いつくと思います。(4)は解答例のように頂点に番号を付けておくと線分の長さを比べるときに便利かもしれません。(5)は同様に頂点に番号を付けて，その和や差を考えることに気付くかどうかがポイントです。

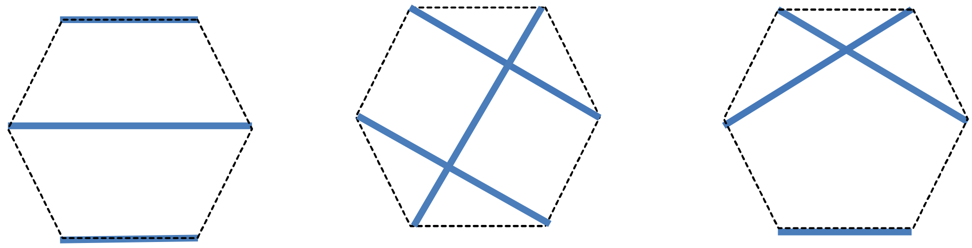
解答例

(1)　辺は 6 本である。正 6 角形の 6 個の頂点から 2 個の点の組を決めると辺または対角線が決まるが，そのうち 6 本は辺であるので，対角線は ${}_6\mathrm{C}_2-6=9$ 本。

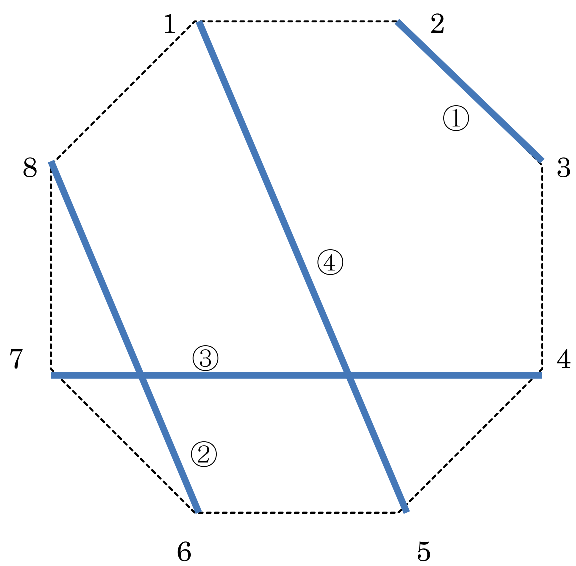
(2) 色を塗った辺または対角線を太線で表すことにする。下の図の通り。



(3) 色を塗った辺または対角線を太線で表すことにする。下の図の通り。



(4) 色を塗った辺または対角線を太線で表すことにする。たとえば次のような例がある。



これは，図のように正 8 角形の各頂点に時計の文字盤のように順番に 1~8 の番号を付けておくと考えやすい。辺または対角線の両端にふってある数が a と b （$a<b$）であるとき，この辺または対角線を「線分(a,b)」と表すことにする。

色を塗った 4 本の辺または対角線の長さがすべて異なるので，その 4 本の辺または対角線の端点にふってある 2 数の差はそれぞれ 1,2,3,4 となる。この図では

①（差が 1）線分(2,3),　　②（差が 2）線分(6,8),

③（差が 3）線分(4,7),　　④（差が 4）線分(1,5)

となっている。

【注意 1】次の図 1 の場合を考える。

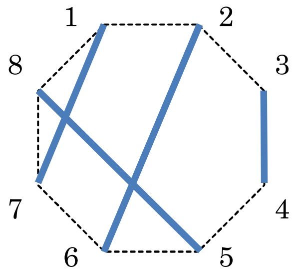
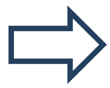


図 1



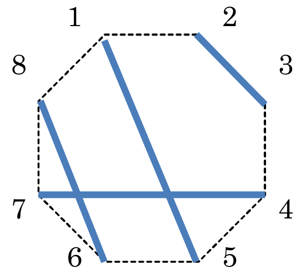


図 2

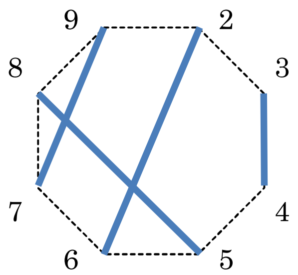


図 3

この場合，線分(1,7)は，端点の 2 数の差が 6 になる。このような状況になった場合，図 2 のように回転や裏返しを施すことにより端点の 2 数の差がそれぞれ 1～4 になるようにする。または図 3 のように端点の番号を“1”から“9”に付け替えることにする。

(5) (4)と同様に正 20 角形の各頂点に順番に 1～20 の番号を付ける。

いま, 色を塗った 10 本の辺または対角線の長さがすべて異なると仮定する。このとき，その 10 本の辺または対角線の端点にふってある 2 数の差はそれぞれ 1,2,3,…,10 になる。そこで，これらの辺または対角線の中で，

差が 1 のものを線分(a_1, b_1)　（$a_1 < b_1$，$b_1 - a_1 = 1$）
差が 2 のものを線分(a_2, b_2)　（$a_2 < b_2$，$b_2 - a_2 = 2$）
差が 3 のものを線分(a_3, b_3)　（$a_3 < b_3$，$b_3 - a_3 = 3$）
:
差が 10 のものを線分(a_{10}, b_{10})　（$a_{10} < b_{10}$，$b_{10} - a_{10} = 10$）

とする。また，

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = A,\quad b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10} = B$$

とする。このとき，あきらかに A と B は正の整数であり，

$$\begin{aligned} B - A &= (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) \\ &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3) + \cdots + (b_{10} - a_{10}) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55 \end{aligned}$$

である。

一方，$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}\} \cup \{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{10}\} = \{1,2,3,\cdots,20\}$ であるから，

$$B+A=(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$$
$$=1+2+3+\cdots+20=210$$

である。そこで，連立方程式 $\begin{cases} B-A=55 \\ B+A=210 \end{cases}$ を解けば，$A=\dfrac{155}{2}$，$B=\dfrac{265}{2}$ となるが，これは A と B が正の整数であることに矛盾する。

したがって，10 本の辺または対角線の長さがすべて異なるようにとることは不可能である。つまり，10 本の辺または対角線のうちのいくつかはその長さが等しくなる。■

【注意 2】もし，注意 1 と同じような状況が起こり，端点の番号を付け替えた場合，$B+A$ の値は，付け替えた番号 1 つ当たり 20 だけ増加する。しかし，この場合でも A と B は正の整数にはならない。

【参考】 (5)で，一般に $2n$ 角形の場合を考える。色を塗った n 本の辺または対角線のうちのいくつかはその長さが等しくなるためには，(5)と同じ記号を用いると

$$B-A=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$B+A=1+2+3+\cdots+2n=n(2n+1)$$

が正の整数解をもたなければよい。この連立方程式を解くと，

$$A=\frac{n(3n+1)}{4},\quad B=\frac{n(5n+3)}{4}$$ が得られる。

$n=4k-3$（k は正の整数）のとき，$A=(4k-3)(3k-2)$，$B=(4k-3)(5k-3)$

$n=4k-2$（k は正の整数）のとき，$A=\dfrac{(2k-1)(12k-5)}{2}$，$B=\dfrac{(2k-1)(20k-7)}{2}$

$n=4k-1$（k は正の整数）のとき，$A=\dfrac{(4k-1)(6k-1)}{2}$，$B=\dfrac{(4k-1)(10k-1)}{2}$

$n=4k$ （k は正の整数）のとき，$A=k(12k+1)$，$B=k(20k+3)$

であるから，$n=4k-2$ および $n=4k-1$（k は正の整数）のときに正の整数解をもたない。すなわち，このとき色を塗った n 本の辺または対角線のうちのいくつかはその長さが等しくなる。

$\boxed{\text{配点}}$ (1)4 点　(2)各 4 点×2＝8 点　(3)各 4 点×3＝12 点　(4)6 点　(5)10 点

$\boxed{\text{講評}}$

この問題は難しい理論や複雑な計算，裏ワザの公式などは必要としません。とにかく考える問題です。得点は予想よりかなり高くなりました。

(1)～(3)についてはほとんどの人ができていました。(1)で，対角線を「3 本」とした解答

がいくつかありました。きっと回転や裏返しにより一致したものは同じものと考えたのでしょう。このように解答したものは細かいところにもよく気が付いたので今回は正解にしました。

(4)についてもよくできていました。答えだけではなく，どのように考えたのかまで詳しく説明の文を書いてくれた人もいます。中には答えが本質的に 1 つしかないことを説明しようとしていた解答もありました。「一意性の証明」も数学では大事なことです。

(5)については完全に説明できている解答はほとんどありませんでした。白紙の解答も目立ちました。問題の下にあった$\boxed{\text{着眼点}}$をヒントにしてこれをもとにして考えた人が多かったです。解答例のように「背理法」を用いて証明しようとする解答が目立ちました。背理法で証明できそうだと予想する発想は素晴らしいです。

残念ながら正解には達しませんでしたが，面白い考え方をした解答もいくつかありました。2 つだけ紹介します。

1 つ目は，正 6 角形の場合に，どうして長さが等しくなるものが出てくるのかそのからくりを詳しく考察して，「したがって正 20 角形に対しても同様にそうなる」と結論付けたものです。前半の正 6 角形についてはよく考えられていましたが，それで「正 20 角形についても同様にそうなる」というのは飛躍のしすぎです。しかし，数学的な考え方として「単純化」を用いたところは素晴らしいことです。

2 つ目は，正 20 角形で長さがすべて異なるように色を塗ったと仮定し，その対角線の長さが最も長いものを除いたものを考え，それと正 18 角形のこの問題を対応させます。同様にその対角線の長さが最も長いものを除いたものを考え，それと正 16 角形のこの問題を対応させます。以下同様に考えて，最終的には正 4 角形まで辺の数を落としていくという考え方です。面白い発想ですね。残念ながら正 20 角形で辺または対角線の長さがすべて異なるからといって，この操作をした後の対応する正 18 角形の辺または対角線の長さがすべて異なるとは限りません。しかし，このように自然数に関するある命題をある操作をしてどんどん小さくしていく考え方は数学でもよく使われるので覚えておくといいかもしれません。

そのほかにも辺または対角線と正 20 角形の中心を結んだ三角形の中心角を考える解答など，興味深い解答はいくつかありました。

解答例と同じようにして解いた正解者は 3 名（札幌北・浅山拓哉くん，旭川東・蘆田一晟くん，岩見沢東・丹野信義くん）です。特に浅山くんの解答は，頂点の番号の和の偶奇と，その差の偶奇が一致することを使って，私の作った解答例の解答よりすっきりとした解答になっていました。

（札幌静修高等学校　杉本幸司）