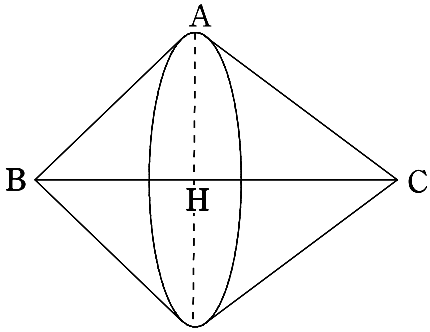
第４問

△ABCにおいて，辺BCを軸として回転してできる立体（回転体）の体積をVとする。次の問いに答えよ。



(1)　点Aから辺BCに下ろした垂線の足（垂線と辺BCの交点）をHとすると，$V=\dfrac{\pi}{3}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{AH}^2$となることを，次の3つの場合について示せ。

①　∠B，∠Cがともに鋭角の場合

②　∠Bが直角の場合

③　∠Bが鈍角の場合

(2)　AB＝BC＝6，CA＝4のとき，次の設問に答えよ。

①　$\cos B$，$\sin B$の値を求めよ。

②　垂線AHの長さを求めよ。

③　体積Vを求めよ。

(3)　△ABCの周囲の長さが16であるとき，次の設問に答えよ。

①　BC＝a，AB＝xとおくとき，xのとりうる範囲をaを用いて表せ。

②　体積Vの最大値とそのときの三角形の各辺の長さを求めよ。

着眼点

(1)　図を描くと容易に分かるはず。

(2)①　三角形の3辺が与えられているので，余弦定理を用いて$\cos B$を求める。

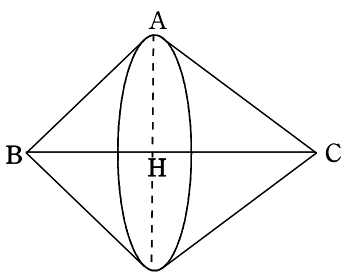
②　AH＝AB$\sin B$よりAHを求める。

③　(1)で示した式より体積Vを求める。

(3)　BCを固定し，AHが最大となるときを求める。直感的にAB＝ACのとき，AHが最大となることが予想できるが，きちんと示すことが必要である。

解答例

(1)①　∠B，∠Cともに鋭角の場合

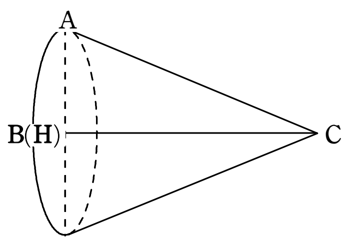


$$V=\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{BH}\cdot \mathrm{AH}^2+\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{CH}\cdot \mathrm{AH}^2$$

$$=\frac{\pi}{3}(\mathrm{BH}+\mathrm{CH})\cdot \mathrm{AH}^2$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{AH}^2$$

②　∠Bが直角の場合

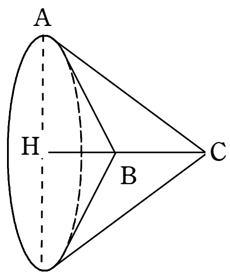


立体（回転体）は単なる円すいであるから

$$V=\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{CH}\cdot \mathrm{AH}^2$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{AH}^2$$

③　∠B が鈍角の場合



$$V=\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{CH}\cdot \mathrm{AH}^2-\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{BH}\cdot \mathrm{AH}^2$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot(\mathrm{CH}-\mathrm{BH})\cdot \mathrm{AH}^2$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{AH}^2$$

よって，①②③より $V=\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{AH}^2$ が成り立つ。

(2)①　△ABC に余弦定理を用いると

$$\cos B=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot \mathrm{BC}}=\frac{6^2+6^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 6}=\frac{7}{9}$$

また，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

②　$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\sin B=6\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

③　$V=\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{AH}^2=\frac{\pi}{3}\cdot 6\cdot\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{256}{9}\pi$

(3)①　$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AB}=x$ のとき，$\mathrm{CA}=16-a-x$ となる。

三角形となるための条件（2 辺の長さの和は他の 1 辺の長さより大きい）より

$a<x+(16-a-x)$　かつ　$x<a+(16-a-x)$　かつ　$16-a-x<a+x$

よって，　$a<8$，$x<8$，$x>8-a$

ゆえに，　$8-a<x<8$　(ただし，$0<a<8$)

②　①より $\mathrm{BC}=a$ が一定の値をとるとき，V が最大となるのは AH が最大となるときである。さらに，AH が最大となるのは△ABC の面積が最大となるときである。

△ABC の面積を S で表すと，ヘロンの公式より

$$S^2=8(8-a)(8-x)\{8-(16-a-x)\}=8(8-a)(8-x)(x+a-8)$$

ここで，

$$(8-x)(x+a-8)=-x^2+(16-a)x+8(a-8)$$

$$=-\left(x-\frac{16-a}{2}\right)^2+\frac{(16-a)^2}{4}+8(a-8)$$

であるから，$x=\frac{16-a}{2}$ …(*)のとき AH が最大となる。(*)は，$x=16-a-x$ と変形できるので，(*)が成り立つのは AB＝CA のときである。

このとき，$\mathrm{BC}=a$ とすると，$\mathrm{AB}=\mathrm{CA}=\frac{16-a}{2}$ となるので

$$\mathrm{AH}^2=\left(\frac{16-a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{16-a}{2}+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{16-a}{2}-\frac{a}{2}\right)=8(8-a)$$

よって，

$$V=\frac{\pi}{3}\cdot a\cdot 8(8-a)=\frac{8}{3}\pi(-a^2+8a)=-\frac{8}{3}\pi(a-4)^2+\frac{128}{3}\pi$$

したがって，$a=4$，すなわち，BC＝4，AB＝CA＝6 のとき最大値 $\frac{128}{3}\pi$ をとる。

※ BC を固定したとき，AB＋CA＝一定 となるので，点 A は 2 点 B，C を焦点とする楕円を描く。したがって，AH が最大となるのはAB＝CA のときである。

一般に，△ABC の周の長さが一定のとき，体積 V が最大となるのは

AB : BC : CA＝3 : 2 : 3 のときである。