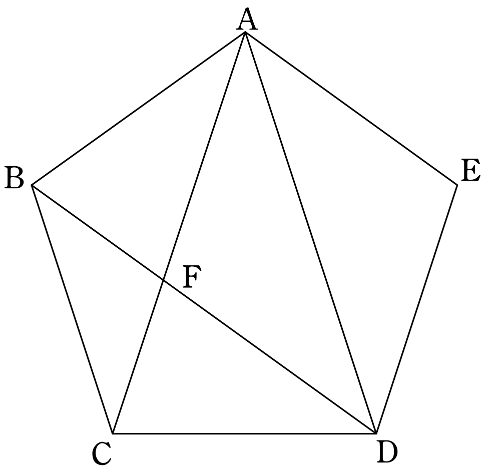
第２問

1 辺の長さ 1 の正五角形 ABCDE において，右の図のように対角線 AC，AD，BD を引き，AC，BD の交点を F とする。

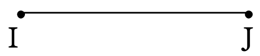


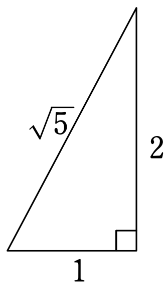
(1)　△ACD と△DFC が相似であることを示せ。

(2)　FC＝x とおくとき，x が満たす 2 次方程式をつくれ。

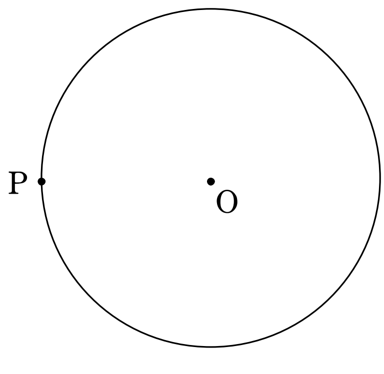
(3)　対角線 AC の長さを求めよ。

(4)　線分 IJ が与えられたとき，この線分 IJ を 1 辺とする正五角形を定規とコンパスで作図したい。どのように作図したらよいか，その手順を説明せよ。なお，右にある直角三角形を参考にしてよい。





(5)　点 O を中心とする円と，その円周上の 1 点 P が与えられたとき，この円に内接し，P を頂点の 1 つとする正五角形を定規とコンパスで作図したい。どのように作図したらよいか，手順を説明せよ。



$\boxed{\text{着眼点}}$

(1)　3 つの対応する内角が等しいことを確認する。辺の長さは関係がない。

(2)　(1)から，辺の比を利用して方程式を導く。

(3)　解の公式を用いるが，正の解のみが辺の長さ。

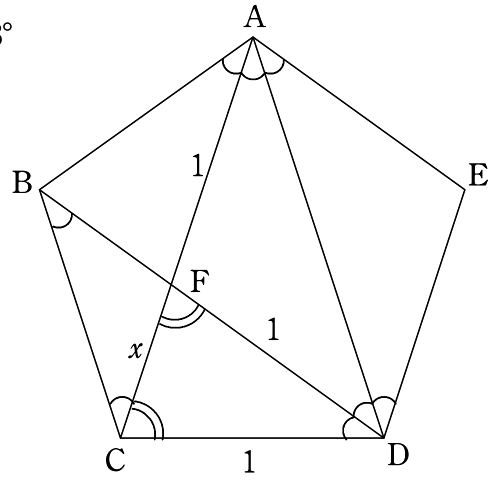
(4)　参考図を考慮して，$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\mathrm{MN}=\sqrt{5}\cdot\dfrac{\mathrm{MN}}{2}+\dfrac{\mathrm{MN}}{2}$ として作図する。

(5)　$\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ なので，直接作図するのは難しいが，(1)(2)(3)から，

$\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ となるので，直径を利用することで作図は容易となる。

解答例

(1)　正五角形の1つの内角は　$180°-\frac{1}{5}\times360°=108°$



よって，$\angle BAE=108°$

また，$BC=CD=DE$ より

$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE=\frac{108°}{3}=36°$

と定まる。同様に，$\angle BCA=\angle CDB=36°$

よって，$\angle ACD=\angle ADC=72°$

$\angle CFD=180°-72°-36°=72°$

となる。

$\triangle ACD$ と $\triangle DFC$ において

$\angle CAD=\angle FDC=36°$，$\angle ACD=\angle DFC=72°$，$\angle ADC=\angle DCF=72°$

より，対応する角がそれぞれ等しいので，$\triangle ACD \backsim \triangle DFC$

(2)　$FC=x$ とおくと，(1)の結果から

$AC:DF=CD:FC$　すなわち，$(x+1):1=1:x$

が成り立つ。

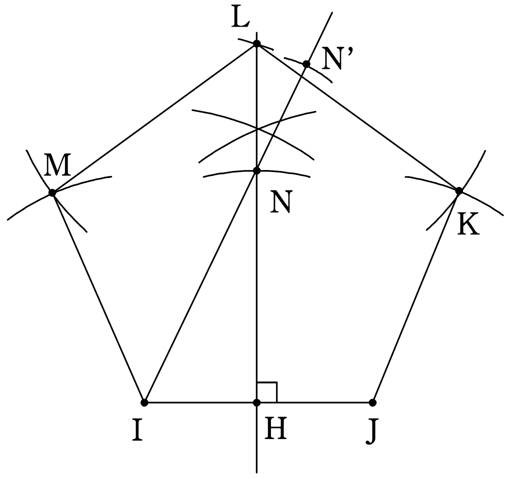
$x(x+1)=1$　より，求める方程式は　$x^2+x-1=0$

(3)　(2)より，$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ だから，$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　ゆえに，$AC=x+1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(4) ⅰ）線分 IJ の垂直二等分線を引く。

I，J を中心とする同一半径の円弧を線分 IJ の上下で交わるように描く。その上下の交点を結べばよい。



ⅱ）線分 IJ の中点を H として，H を中心に半径 IJ の円弧を描き，ⅰ）の垂直二等分線と上方で交わる点を N とする。

ⅲ）半直線 IN を引く。（N 側に延長する）

ⅳ）N を中心とする半径 IH の円弧と半直線 IN との交点を N' とする。

ⅴ）I を中心とする半径 IN' の円弧とⅰ）の垂直二等分線との交点を L とする。

ⅵ）L を中心とする半径 IJ の円弧を描き，同じ半径で I，J を中心とする円弧との交点をそれぞれ M，K とする。

ⅶ）I，J，K，L，M を結ぶと，正五角形 IJKLM が完成する。

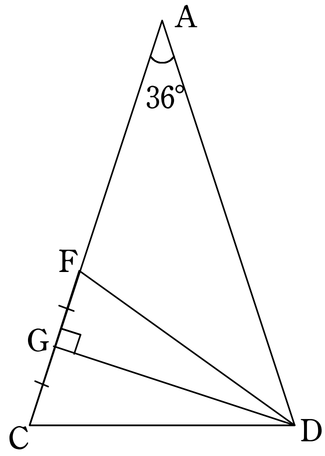
(5)　円の半径を R とする。

この円に内接する正五角形の 1 辺の長さ a は，

(1)と正弦定理から

$$a=2R\sin 36°$$

また，(1)の図で，D から対角線 AC に下ろした垂線と AC との交点を G とすると



$$\cos 36°=\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AD}}=\frac{1+\frac{x}{2}}{1+x}=\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+3}{4}\div\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

よって

$$a^2=(2R)^2-(2R\cos 36°)^2=(2R)^2-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}R\right)^2$$

ゆえに，次の手順で作図できる。

ⅰ）PO を延長して，直径 PQ を引く。

ⅱ）半径 OQ の垂直二等分線を引き，OQ との交点を R とする。

ⅲ）R を中心に半径 R の円弧を描き，ⅱ）の垂直二等分線との交点を S とする。

ⅳ）QS を結び，S 側に延長する。

ⅴ）S を中心に半径 $\frac{R}{2}$(＝OR) の円弧を描き，ⅳ）の半直線 QS との交点を T とする。

ⅵ）Q を中心に半径 QT の円弧を描き，円 O との交点を U，V とする。

ⅶ）U，V を中心に半径 PU の円弧を描き，円 O との交点をそれぞれ W，X とする。

ⅷ）PU，UW，WX，XV，VP を結ぶと，正五角形が完成する。