第４問

n を 4 以上の整数とする。1 枚の硬貨を n 回投げ，表が出たら１を，裏が出たら０を左から順に記入する。 その n 個の数について，隣り合う数の差を$(n-1)$個つくり順にならべる。さらに，その$(n-1)$個の数について，隣り合う数の差を$(n-2)$個つくり順に並べる。この$(n-2)$個の数の中にある１の個数を X とする。

例えば，$n=6$ のとき，硬貨が「表表裏表表裏」の順に出たら，6 個の数を

１１０１１０

と並べ，次に 6 個の数について隣り合う数の差をとる操作を 2 回行うと

１１０１１０

↓（隣り合う数の差をとる）

０１１０１

↓（隣り合う数の差をとる）

１０１１

となり，この 4 個の数「１０１１」の中に数１は 3 個あるので，$X=3$ となる。

(1) $n=4$ のとき，$X=1$ となる確率を求めよ。

(2) $k=0,1,2,3,\cdots,n-2$ について，$X=k$ となる確率を求めよ。

(3) m を 2 以上の整数とする。$k=1,2,3,\cdots,m$ について，

$$k\,{}_mC_k=m\,{}_{m-1}C_{k-1}$$

が成り立つことを示せ。

(4) X の期待値 E を求めよ。