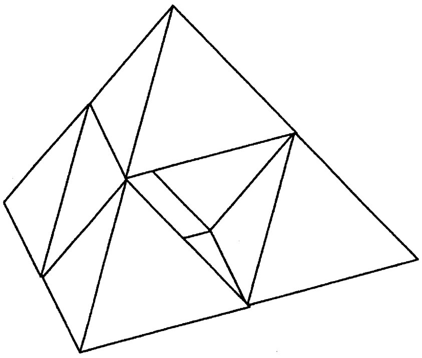
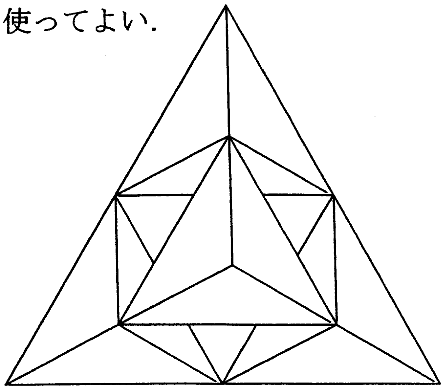
第５問

旧正月を控え、中国料理店「ベイスーヂャオ（北数教）」では店の飾り付けなどディスプレイに余念がない．（旧正月とは中国その他の地域で旧暦により正月を祝うことであり，本年は２月１４日である．）

お店では飾り付けとして，テーブルに１辺 4cm の透明な正四面体を図のように重ね，それを載せるのにぴったりの円卓をこしらえることにした．次の問いに答えよ．

最後につけてある正四面体については，自由に使ってよい．





真上から見た図

(1) 正四面体 A − BCD の頂点 A から △BCD に下ろした垂線の足を H とする．垂線 AH の長さを求めよ．

(2) 正四面体 A − BCD の体積を求めよ．

(3) 三段目まで積み上げるのに必要な正四面体の個数を求めよ．

(4) 二十段目まで積み上げるのに必要な正四面体の個数を求めよ．またそのときの，最下段の正四面体の個数を求めよ．

(5) (4) のとき，円卓は最下段にできる正三角形の外接円と同じ大きさとしたい．円卓の半径を求めよ．

飾り付けも終わろうとした頃，店長が「正四面体に内接する赤い球を入れたら，すごくきれいになるよ．それと，二十段目まで積み上げたとき，飾り物全体を覆う（外接する）透明の球も作っておいて．」と指示したので，もう一度初めからやり直すことになった．次の問いに答えよ．

(6) (4) のとき，飾り物全体を覆う（外接する）球の半径を求めよ．

(7) 正四面体 A − BCD に内接する球の半径を求めよ．また，その球を赤いスプレー塗料で一つひとつ丁寧に色づけし，(4) のときの一つひとつの正四面体の中に入れる．赤いスプレー塗料はどのくらい必要か求めよ．ただし，スプレー塗料を吹き付けるには 50cm^2 あたり 1ml 必要と考える．

着眼点

このようなディスプレイを見たことがあり，「きれいだな」と思うとともに「数学コンテストの問題になるのでは？」と思い，出題してみました．高校生にとっては空間図形というのはどうしても馴染みがうすく，大学入試問題でも大変苦労しているようです．本問で少しでも新たな視点が見つかればと思います．

解答例

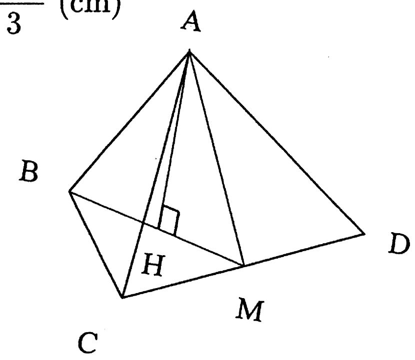
(1) 辺 CD の中点を M として，四面体 A-BCD の断面図 △ABM を考える．

$\mathrm{BM} = \mathrm{AM} = 2\sqrt{3}$ (cm),

AH=h, BH=x とすると，三平方の定理より

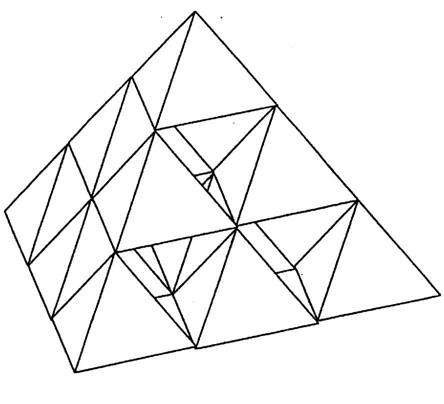
$4^2 = h^2 + x^2 \cdots$①, $(2\sqrt{3})^2 = h^2 + (2\sqrt{3} - x)^2 \cdots$②

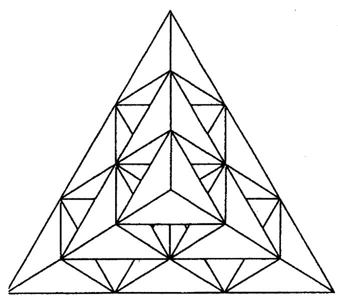
となるので，①②より $x=\mathrm{BH}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (cm), $h=\mathrm{AH}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ (cm)



(2) $\mathrm{V} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{AH} \cdot \triangle\mathrm{BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{6}}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}\right) = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ (cm^3)

(3) (正四面体の個数) $= 1 + 3 + 6 = 10$ (個)





真上から見た図

(4) (正四面体の個数)

$= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66$

$+78 + 91 + 105 + 120 + 136 + 153 + 171 + 190 + 210 = 1540$ (個)

また，円卓に接している正四面体の個数は 210 (個)

(別解) 数学 B を習っている人なら以下のような解き方になるでしょう．

$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \cdots$

この数列の階差数列は初項 2，公差 1 となるから，一般項は

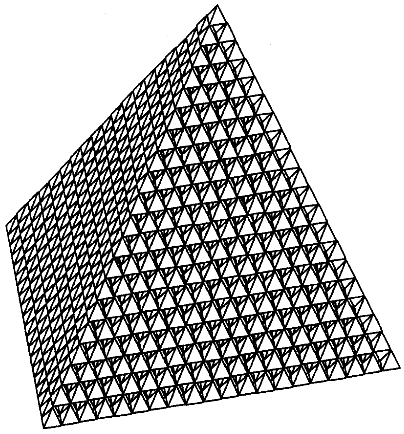
$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{2}(n^2+n)$

したがって、20 段目までの正四面体の総和は

$S = \sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(k^2+k)$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}\cdot 20\cdot(20+1)\cdot(2\cdot 20+1) + \frac{1}{2}\cdot 20\cdot(20+1)\right\} = 1540$ (個)

また，円卓に接している正四面体の個数は $a_{20} = \frac{1}{2}(20^2+20) = 210$ (個)

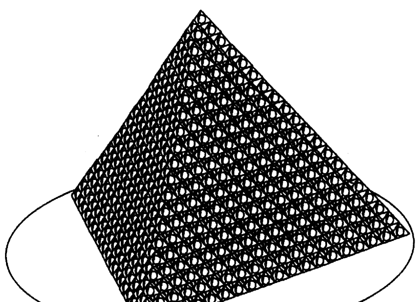


(5) それぞれの段の正四面体は正三角形状に並び，1 段増える毎に正三角形の 1 辺の正四面体の個数が 1 個ずつ増えるから，20 段積み上げたときの最下段の正三角形状に並んだ正四面体は 1 辺に 20 個ある．

つまり，円卓の半径は 1 辺が $80(=4\cdot 20)$cm の正三角形の外接円の半径となる．

正三角形では外心と重心が一致するので，半径を r_1 とすると，

$r_1 = 40\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{80\sqrt{3}}{3}$ (cm)

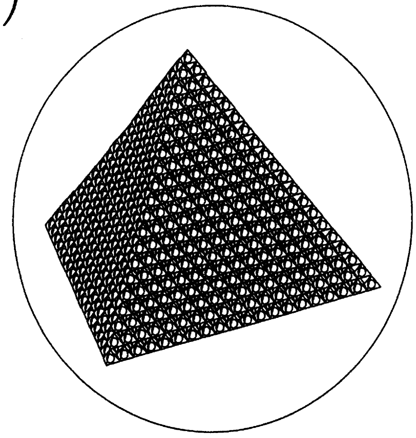


(6) 1 辺が $4cm$ の正四面体の外接円の半径 r_2 を考える．

三平方の定理より $r_2{}^2 = \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3} - r_2\right)^2$

よって，$r_2 = \sqrt{6}$

したがって，全体を覆う球の半径は $20\sqrt{6}$ (cm)



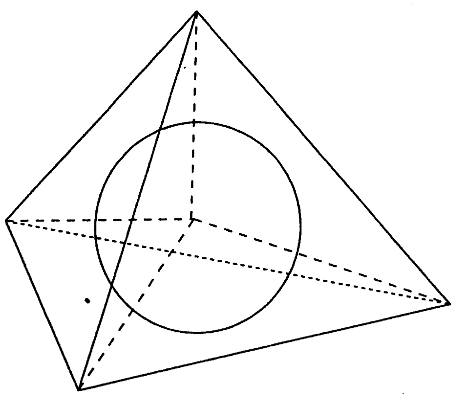
(7) 内接球の半径 r_3 は正四面体を 4 分割したときのそれぞれの四面体の高さとなるので，

$\dfrac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot r_3 \cdot 4 = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ よって，$r_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

また，1 つの内接球の色づけに必要なスプレー塗料の量は球の表面積の $\dfrac{1}{50}$ と考えて，

$S = 4 \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{50} = \dfrac{4}{75}\pi$ (cm^2)

したがって，スプレー塗料の量は $\dfrac{4}{75}\pi \cdot 1540 = \dfrac{1232}{15}\pi \fallingdotseq 257.9$ (ml)



講　評

数学コンテスト終了後に配布した「解答と解説」の第５問の（３）（７）の解答例に作成時の入力ミスがありました．謹んでお詫び申し上げます．本編の解答例を参考にしてください．

配点は (1)4 点 (2)4 点 (3)4 点 (4)6 点 (5)6 点 (6)8 点 (7)8 点としました．

全受験者 241 名中，正答者の人数と割合は (1) が 132 名，54.8%，(2) が 110 名，45.6%，(3) が 154 名，63.9%，(4) が 75 名，31.1% (5) が 125 名，51.9%，(6) が 23 名，9.5%，(7) が 9 名，3.7%，全問正解は 3 名，1.2%でした．

第５問全問正解は深澤剛くん（札幌北高２年），栗原沙織さん（札幌西高１年），紺田州人くん（室蘭栄高２年）の３名でした．栄誉を称えたいと思います．また，重元守くん（札幌北高２年），磯田龍くん（旭川東高２年），大懸剛貴くん（旭川東高２年），鈴木杏平くん（室蘭栄高３年）の４名はほとんど満点なのですが，惜しいところで満点を逃しました．

(1) 解答例の図で BH は △BCD の外接円の半径と考えて求めることもできます．

$2\mathrm{BH}=\dfrac{\mathrm{CD}}{\sin\angle\mathrm{CBD}}=\dfrac{4}{\sin 60^\circ}$．したがって，$\mathrm{BH}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

誤答で多かったのは $2\sqrt{3}$ としたものです．△ABM を正三角形と考えたのでしょうか．

(2) 体積の公式については知っている人が多かったように見受けます．ただ，(1) で AH が正しく求まらなければ，正答とはなりません．

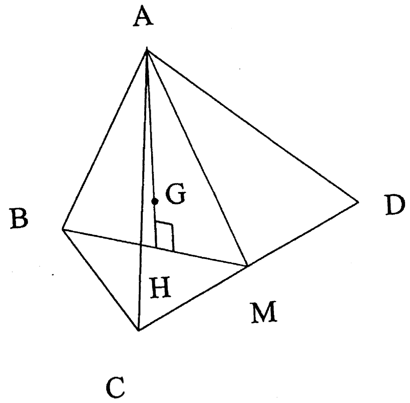
(3) これは正答者が多いと考えていましたが，実際には 6 割程度でした．実際に図に描いてみて数えるとできたと思うのですが，正四面体が 3 倍ずつ現れると考えていた受験生も多かったようです．

(4) 2 年生は数列を学習済みの受験生も多かったと思います．階差数列を考え，解答例の別解のように解答している受験生も多数見られました．正四面体が 3 倍ずつ現れると考えていた受験生は総数 571 個，最下段 57 個と解答している場合が多かったようです．

(5) 正弦定理を利用した解答も多数ありました．外接円の半径を R とすると，

$2\mathrm{R}=\dfrac{80}{\sin 60^\circ}$．したがって，$\mathrm{R}=\dfrac{80\sqrt{3}}{3}$.

(6) (5) と同じ解答をしていた受験生も多数いました．(5) の円卓は球の中心を通る平面で切断したものではないのですが，多くの受験生は (5) と同じと判断したようです．また，$20\cdot\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{3}{4}=20\sqrt{6}$ としても求まりますが，$20\cdot\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{160\sqrt{6}}{9}$ としている受験生が多数いました．正四面体の重心は解答例 (1) の図でいうと線分 AH を 3:1 に内分するする点となりますが，正三角形の重心と同じように考えて，線分 AH を 2:1 に内分する点と考えたようです．



(7) 球の表面積の公式は知っている人が多かったようですが，内接円の半径を求めることと，スプレー塗料の量は表面積の $\dfrac{1}{50}$ 倍をして，さらに 1540 個分であるということを考えなければならないので，途中でギブアップした受験生が多かったように見受けます．中には 1 個分のみの量を求めて終わっているものもありましたが，これでは店長に叱られ

ます．

問題の冒頭に「中国料理店」とありますが，初めは「中華料理店」としていました．一般的には「中華料理店」は「大衆店」的なイメージ，「中国料理店」は「専門店」的なイメージがあるそうで，中国ではそういう呼び方はせず，「広東料理」とか「四川料理」などというようです．以上は亜州 IR 株式会社　執行役員　編集部長　永井　茂　氏に伺いました．この場をかりてお礼申し上げます．また，スプレー塗料の量については大手ホームセンターの方に電話にて確認しました．

現代の政治や社会に象徴されるように，一般に私たちは，目の前のことは時間をかけて議論するけれども，見えない部分は知らん顔という状況に陥りがちです．数学はそのような隠された部分を解き明かすという面白味があるように思います。また解き明かす努力をすることによって，次第に思考力や洞察力が培われていくのだと思います．

今回納得のいく結果を得られなかった諸君も決して落胆することなく，学習を続け，力をつけていくことを願っています．何かに挑戦する姿勢そのものが，今求められていて，しかも生涯にわたって必要で大切なものだと思います．受験生諸君みんなに未来があり，それぞれにすべきことがあり，次代は君たちにかかっています．受験生諸君の未来に幸あれ！

問題作成や解答，解説，講評作成には多くの先生にご助言を頂きました．この場をかりて，お礼申し上げます．

北海道札幌東陵高等学校　前田勝利