着眼点

(1) すべての場合は 16 通りしかないので，必要な場合を書いて数え上げる。

(2) (1)から問題の構造がわかれば，コイン投げn回の表裏の出方2^n通りのうち，$X=k$となる場合が$4{}_{n-2}C_k$通りであることがわかる。

(3) これは(4)を計算させるためのヒント。

(4) (2),(3)から二項定理を用いて計算する。

解答例

(1) $n=4$ のとき，硬貨の表裏の出方は全部で2^4通りあり，このうち$X=1$となるのは下の図の 8 通り。

０００１　１１１０　０１００　１０１１　００１０　１１０１　０１１１　１０００

↖ ↗　↖ ↗　↖ ↗　↖ ↗

００１　１１０　０１１　１００

↖ ↗　↖ ↗

０１ ←（$X=1$となる場合はこの 2 通り)→ １０

よって，求める確率は$\dfrac{8}{2^4}=\dfrac{1}{2}$…(答)

(2) 隣り合う数の差をとる操作を 1 回または 2 回行った後の数はどれも１か０である。差をとる操作を 2 回行った後の$(n-2)$個の数の列のうち１がk個あるものは，${}_{n-2}C_k$通りある。この各々について，差をとる 1 つ前の$(n-1)$個の数の列は１で始まる列と０で始まる列の 2 通りずつあり，さらにこの 2 通りの各々について差をとる前のn個の数の列も同様に 2 通りずつある。

０００１１…０　１１１００…１　０１００１…０　１０１１０…１

↖ ↗　↖ ↗

００１０…１　１１０１…０

↖ ↗

０１１…０ ←(${}_{n-2}C_k$通りのうちの 1 つ)

したがって，硬貨の表裏の出方2^n通りのうち，$X=k$となる場合は${}_{n-2}C_k\times2\times2$

$=4{}_{n-2}C_k$ (通り)。

よって，$X=k$となる確率は$\dfrac{4{}_{n-2}C_k}{2^n}=\dfrac{{}_{n-2}C_k}{2^{n-2}}$…(答)

(3) $$k{}_mC_k=k\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}=\frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}=m\cdot\frac{(m-1)!}{(k-1)!\{(m-1)-(k-1)\}!}=m{}_{m-1}C_{k-1}$$

よって，$k{}_mC_k=m{}_{m-1}C_{k-1}$ （証明おわり）

(4) (2),(3)および二項定理を用いて

$$E=0\cdot\frac{{}_{n-2}C_0}{2^{n-2}}+1\cdot\frac{{}_{n-2}C_1}{2^{n-2}}+2\cdot\frac{{}_{n-2}C_2}{2^{n-2}}+\cdots+(n-2)\cdot\frac{{}_{n-2}C_{n-2}}{2^{n-2}}$$

$$=\frac{1}{2^{n-2}}\{1\cdot{}_{n-2}C_1+2\cdot{}_{n-2}C_2+\cdots(n-2)\cdot{}_{n-2}C_{n-2}\}$$

$$=\frac{1}{2^{n-2}}\{(n-2)\cdot{}_{n-3}C_0+(n-2)\cdot{}_{n-3}C_1+\cdots+(n-2)\cdot{}_{n-3}C_{n-3}\}$$

$$=\frac{n-2}{2^{n-2}}({}_{n-3}C_0+{}_{n-3}C_1+\cdots+{}_{n-3}C_{n-3})$$

$$=\frac{n-2}{2^{n-2}}\cdot(1+1)^{n-3}$$

$$=\frac{n-2}{2}$$

ゆえに, $E=\dfrac{n-2}{2}\cdots$(答)

$\boxed{\text{配点}}$　(1) 8 点　(2) 12 点　(3) 8 点　(4) 12 点

$\boxed{\text{講評}}$

全体的に 1 年生はあまりできていなく、2,3 年生が点をとっていました。設問別にみると、(1)はよくできていましたが、(2)以降はあまりできていませんでした。　(2)では、解答例のような解き方以外に、次のようなものがありました。

はじめの n 個の数の列を $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 、
差をとった(n −1)個の数の列を $b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$ 、
さらに差をとった(n −2)個の数の列を $c_1,c_2,\cdots,c_{n-2}$ 、
すなわち、

$b_i=|a_{i+1}-a_i|$ （$i=1,2,\cdots,n-1$）、

$c_j=|b_{j+1}-b_j|$ （$j=1,2,\cdots,n-2$）

とすると、

$c_j=||a_{j+2}-a_{j+1}|-|a_{j+1}-a_j||$

なので、

$a_{j+2}=a_j$ のとき、$c_j=0$ 、

$a_{j+2}\neq a_j$ のとき、$c_j=1$

ということを使って解く方法です。(2)が解けた生徒のおよそ半数がこの方法（または本質的にこれと同じ方法）で解いていました。また、答案の中に

$a_{j+2}=a_j$ をみたす列 a_j, a_{j+1}, a_{j+2} を “３つの数について左右対称”

と呼んでわかりやすく記述してあるものもありました。

(3)は(2)よりできており、(3)まで解いた生徒の多くは(4)にも手をつけていました。(4)では、(2)の答えの形から(3)を利用することに気づくことを期待していました。しかし、(4)が答えだけの答案用紙がたくさんありました。答えを予想で終わらせてはいけません。

問題を解いたらそれで終わりではなく、

「“０と１の列”を“０と１と２の列”にしたらどうなるか」

など自分でいろいろ試してみると面白いと思います。興味があればやってみてください。

（北海道札幌国際情報高等学校　和田文興）