

問題 4

関数 $f(x)$ は次の条件(I)~(IV)を満たしている。

(I) 定義域は $-1 < x < 1$, 値域は実数全体である。

$$(II) \quad f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

($-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$ のとき, $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ である。)

$$(III) \quad f\left(\frac{9}{11}\right) = 1$$

(IV) 任意の実数 k に対して, 方程式 $f(x) = k$ を満たす x は, ただ 1 つ存在する。

次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。

(2) $f(-x) = -f(x)$ を示せ。

(3) $f(x) = -1$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$ となる x の値をそれぞれ求めよ。

(4) $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = s$, $f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right) = t$ のとき, $f(x)$, $f(y)$ を s , t で表せ。さらに,

$f(x) \cdot f(y) = 2009$ を満たす s , t の値を求めよ。ただし, s , t は正の整数とする。

(5) (4)で求めた s , t のうち, s の最大値を s_0 , そのときの t の値を t_0 とするとき,

$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = s_0$, $f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right) = t_0$ となる x の値を推定せよ。ただし, s , t の値が 1 組し

かないときは, それを s_0 , t_0 とする。