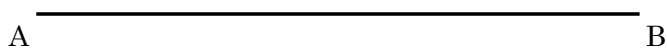
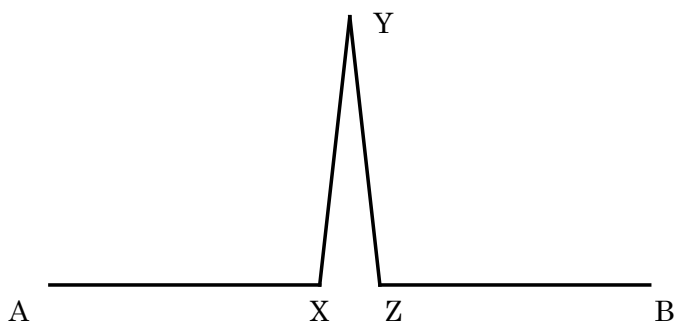


問題 5

下図【Fig-1】のように、長さ 10 の線分 AB が存在する。線分 AB を、【Fig-2】のように $AX=XY=YZ=ZB=\frac{9}{2}$ となる折線 AX - XY - YZ - ZB に変換する。(Fig-2)



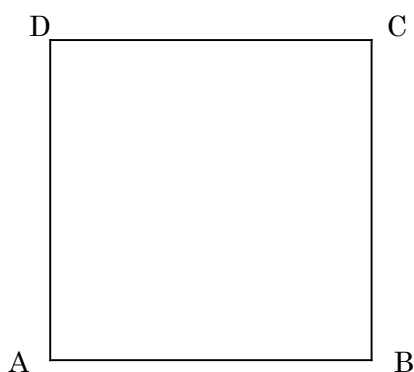
【Fig-1】



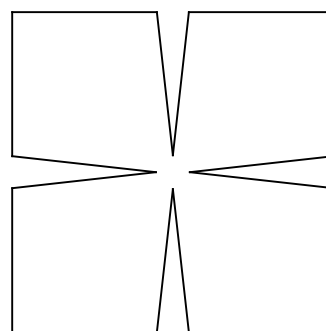
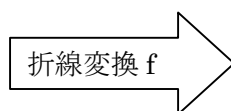
【Fig-2】

この変換を「折線変換 f」と定義する。

- (1) 【Fig-2】において、 $\triangle XYZ$ の面積を求めよ。
- (2) 【Fig-3】のような 1 辺の長さが 10 である正方形 ABCD の各辺に「折線変換 f」を行った図形【Fig-4】の面積を求めよ。



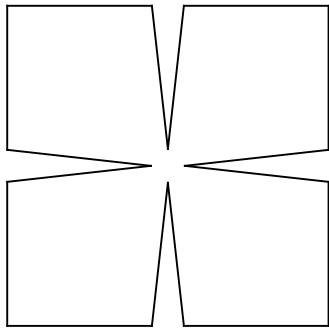
【Fig-3】



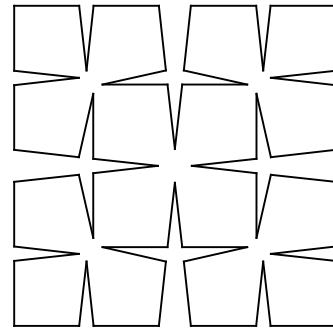
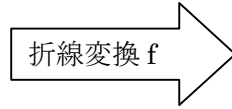
【Fig-4】

ここで、一般に、長さ l の線分 AB に対しても、 $AX=XY=YZ=ZB=\frac{9}{20}l$ となる折線 AX - XY - YZ - ZB に変換することを「折線変換 f」と呼ぶことにする。

- (3) 【Fig-4】の図形の各辺に「折線変換 f」を行った図形【Fig-5】の面積を求めよ。

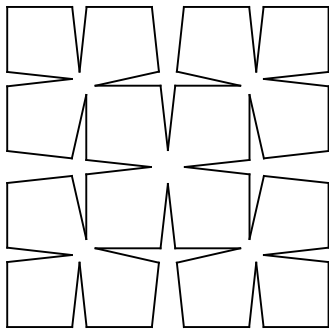


【Fig-4】

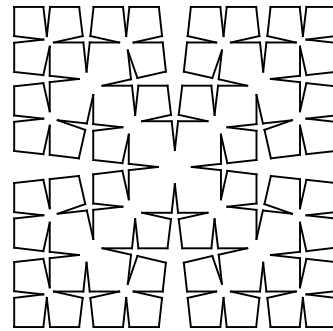
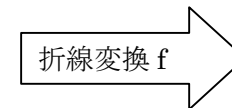


【Fig-5】

- (4) 【Fig-5】の図形の各々の辺に「折線変換 f」を行った図形【Fig-6】の面積を求めよ。



【Fig-5】

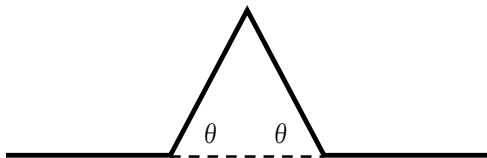


【Fig-6】

- (5) 次に、図【Fig-1】の直線 AB(長さ 10)を 4 等分し、4 等分した点が、【Fig-7】のように関節のように曲がるものとする。この変換を g とする。

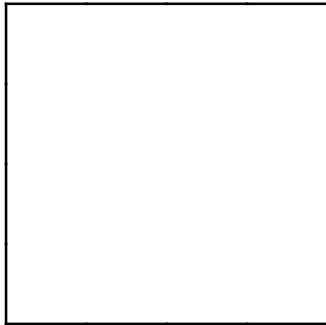


【Fig-1】

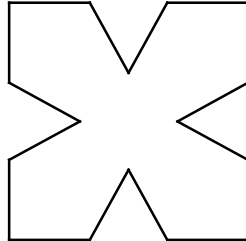


【Fig-7】

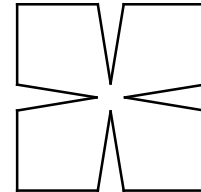
この変換を g と定義する。



【Fig-3】



【Fig-8】



【Fig-9】

この変換 g において、

【Fig-7】のように曲がる角が θ のとき、1辺が10になる正方形【Fig-3】の各辺に、変換 g を実施し【Fig-8】を完成させた。

更に、【Fig-8】の曲がる角 θ を大きくして【Fig-9】を完成させた。角 θ を 0° から 90° まで変化するにしたがって【Fig-3】の面積 $>$ 【Fig-8】の面積 $>$ 【Fig-9】の面積と変化することがわかる。【Fig-3】と【Fig-9】との面積の比を θ を用いて表せ。

配点および採点基準

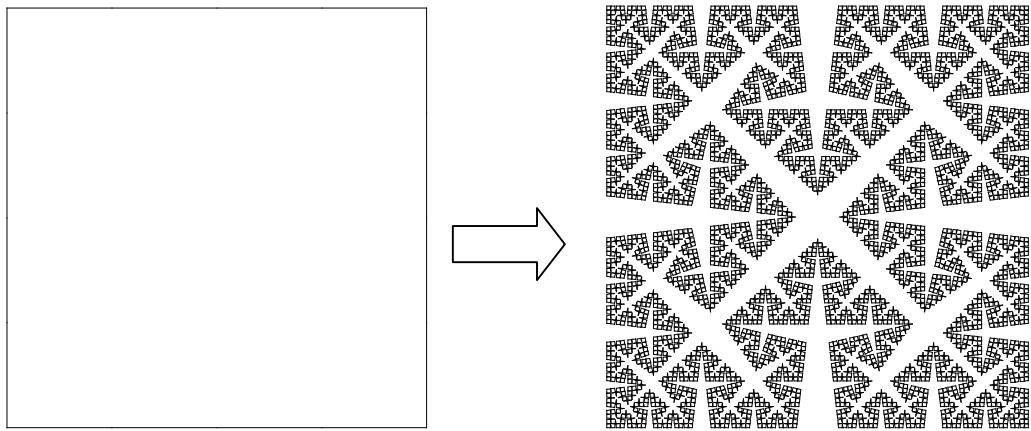
(1)~(5) 各8点

(1)~(3)については、計算が主流なので完全解答とした。また、(4)と(5)については、方針や考えが正しいもの2点。計算ミスし正解ではないが正しいもの4点。

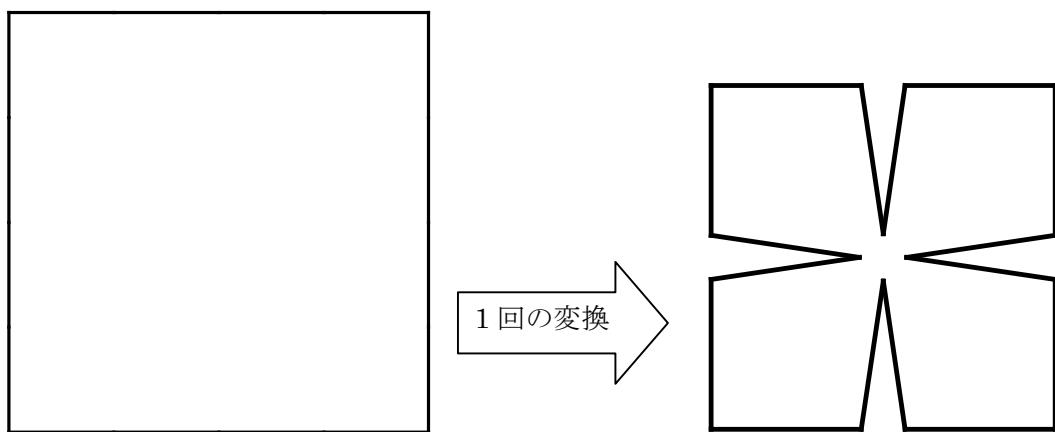
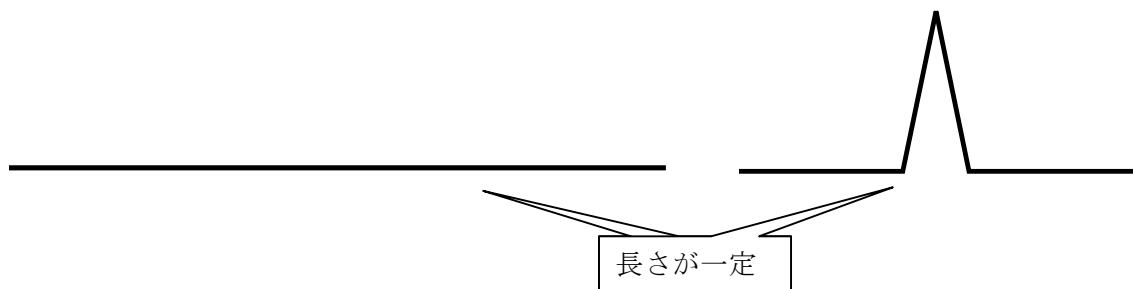
講評

中学3年生までの知識までで解けるように作成した。昨年の問題5より多くの正解者がいた。しかし、白紙の答案も多く40点を取る生徒と0点を取る生徒の二極分化を感じた。

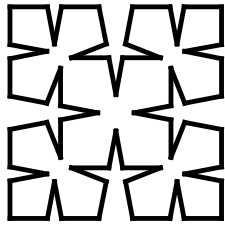
フラクタル図形の分野からの出題である。(1)~(4)は線分の変換が増えるにつれて、周囲(の長さ)がどんどん増加していくタイプを扱った。



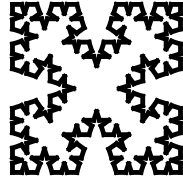
(5)は線分の長さが一定に折れ曲がっていく変換を扱った。



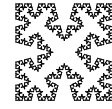
長さが一定の変換なので、変換の回数によって面積は小さくなっていく。



【2回の変換】



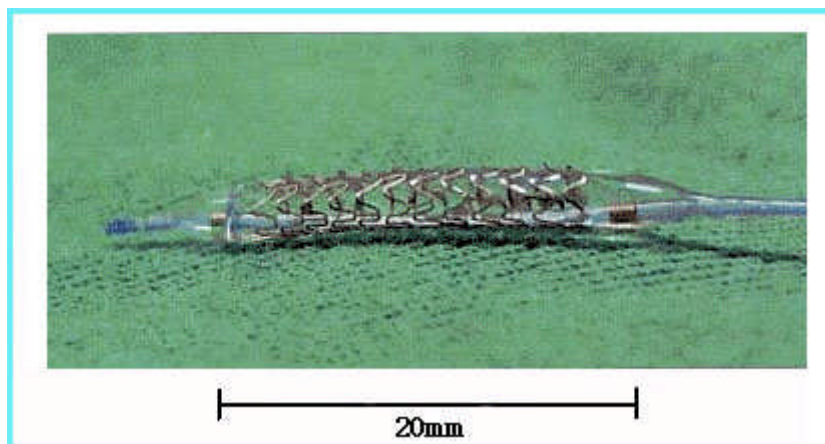
【3回の変換】



【4回の変換】

この数学的な考え方が、実用された医療器具が実用化されている。循環器科で最近多く利用されている「ステント」である。狭窄した血管内へ挿入して拡張させ、血流を良くする。

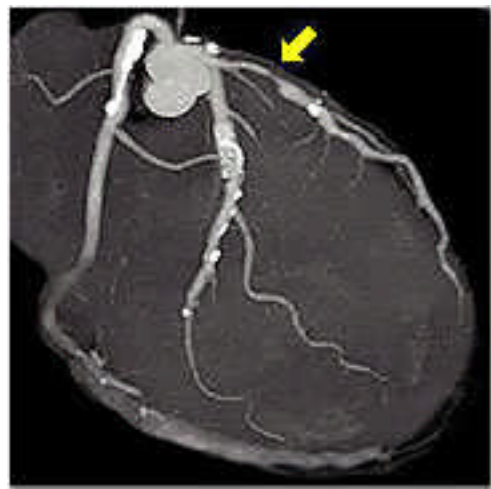
医療用ステント↓



心臓の冠状動脈に挿入し、拡張させた画像→

右図のように、心筋梗塞の治療に役に立っている。血管内は細いので、血管内を移動するときには、小さく、患部では広がるように設計した。より小さく血管内を移動でき、適度な拡張をするステントの設計が待たれる。

このように、フラクタル数学のみならず、数学の精神は医学の進歩と人類の福祉に欠くことのできない分野である。



(北海道札幌北高等学校 松本睦郎)