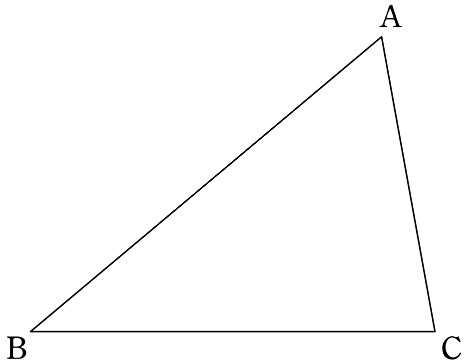
問題２



△ABCにおいて，各辺の垂直二等分線の交点を外心(三角形の外接円の中心)，中線(各辺の中点ともう一つの頂点を結んだ線分)の交点を重心，各頂点から向かい合う辺に引いた垂線の交点を垂心といい，それぞれO，G，Hと表す。なお，外心，重心，垂心のいずれについても３線が一点で交わること(たとえば，外心を求める場合，２線の交点として求めてよい)，および，重心Gは中線を2：1に内分する点であることは証明せずに使ってよい。また，鈍角三角形の場合など，三角形の形状によっては異なる図で考えなければならない場合もあるが，本問においては鋭角三角形の場合のみ考えることとする。

(1)　解答用紙図１の△ABCについて，辺BCの垂直２等分線および辺CAの垂直２等分線を定規とコンパスを使って作図し，外心Oを求めよ。(三角定規の直角を用いてはいけない)　なお，作図に使った点や線，コンパスの線の跡は消さないこと。

(2)　解答用紙図２の△ABCについて，点Aから辺BCに引いた垂線および点Bから辺CAに引いた垂線を定規とコンパスを使って作図し，垂心Hを求めよ。(三角定規の直角を用いてはいけない)　なお，作図に使った点や線，コンパスの線の跡は消さないこと。

（なお，定規とコンパスがない場合，フリーハンドで図をかいてもよいが，コンパスの使用箇所について説明とコンパスの線の跡を描き入れること。）

一般に，△ABCの外心O，重心G，垂心Hは一直線上にあり，GH＝2GOが成り立っている。(このことをオイラー線の定理と呼ぶことがあり，３点O，G，Hを通る直線をオイラー線という。)　このことを証明したい。

(3)　△ABCについて，辺BCの中点をL，外接円の直径をCDとするとき，DBとOLは平行である。このことを表す図を図３の中に描き，このことを証明せよ。

(4)　四角形ADBHは平行四辺形であることを証明せよ。

(5)　線分OHと線分ALの交点をG′とするとき，△G′AHと△G′LOが相似であることを示し，相似比を求めよ

(6) 点G′が△ABCの重心Gと一致することを証明せよ

補足：オイラー線の定理を証明する方法は他にもある，(3)～(6)の方法を用いずに証明してもよいが，その場合は解答用紙に別解と明記した上で解答すること。

配　点

(1)　６点　　(2)　６点　　(3)　８点　　(4)　８点　　(5)　６点　　(6)　６点

$\boxed{\text{講　評}}$

レオンハルト・オイラーは歴史上もっとも偉大な数学者の一人です。18世紀にスイスの聖職者の家庭に生まれ両親からは牧師になることを期待されながら数学への思いを捨てきれず，ありとあらゆる数学の分野で多大な業績を残しました。有名な一筆書きの原理もオイラーがケーニヒスベルク（今のカリーニングラード）という町の川にかかった橋を同じ橋を二度渡らずに全部渡りきることができるかという問いに対して考えたものですし，方程式の理論，整数の理論，複素数の理論，関数に関する理論，さらには力学や光学・音響学など応用数学の分野に至るまでここで書きつくせるものではありません。もちろん今回のオイラー線の定理もオイラーの見つけた数学的発見のひとつです。

一般的に図形に関する数学を「幾何」とか「幾何学」といいますが，北海道高等学校数学コンテストでは初期のころから平面図形（平面幾何）の問題をほとんど毎年１題は出題しています。現在の数学の教科書では平面幾何の内容は中学と高校に分かれていますが，高校では１年で学習する数学Ａの中に含まれています。数学の歴史の中でも幾何学の果たす役割は非常に大きく，数学の理論的体系を作るときに必ずモデルとなるのが古代ギリシア以来のユークリッド幾何学であったりします。平面幾何は古代ギリシア以来の古い歴史を持ってはいますが，今回の出題となったオイラー線の定理が発見されたのは18世紀でしたし，第22回のコンテストに出題したモーレーの定理は19世紀末の発見です。平面図形の分野では知られざる定理がまだ残っているかもしれませんよ。

今回の出題では，一般の三角形 ABC の外心 O，垂心 H，重心 G が一直線上にあり，GH＝2GO が成り立つというオイラー線の定理を基本的には中学までの学習内容で証明することを狙って問題にしました。証明の仕方はいろいろあると思いますが，今回は初等幾何的な方法ということで平行線と相似の性質を用いた証明を設問の柱としました。

問題の前半［(1)から(3)まで］で作図をしてもらい，後半がオイラー線の定理の証明となっています。オイラー線の定理の証明にはいろいろな方法があり，証明自体は決して難しくはないと思うのですが，自力で最初から最後まで証明するのはかなり大変です。また，「解答と解説」に書いたように，平面座標を用いた方法（高校では数Ⅱの内容です）やベクトルを用いた方法（高校では数Ｂの内容）もあるので「解答と解説」の末尾に別解として示しました。実はオイラー自身が証明の際に使ったのは平面座標を用いた方法でした。（W・ダンハム著『オイラー入門』シュプリンガー数学リーディングス）また，数Ｂの参考書などではベクトルを用いた証明が載っているものもあります。ただし，今回のコンテストでは図形の性質を用いた誘導をつけたこともあり，座標を用いて証明した人はいませんでしたし，ベクトルを用いて証明していた人も受験者の中でわずか２人でした。

なお，定理がどのような三角形についても成り立つことを証明するには，三角形 ABC が直角三角形の場合や鈍角三角形の場合などは図が異なるため場合分けの必要があります。しかし，この問題においては問題文中の図のような三角形（鋭角三角形）についてのみ示せばよいことにしました。また，今回の出題では，外心，垂心，重心が１点で交わることや重心が中線を 2：1 に内分する点であることなどは既知のこととして使ってよいとしましたが，本来は証明しなければいけないことです。しかし，今回は問題を簡潔にするため

にあえて証明不要としました。

さて，今回の問題２は受験したほとんどの人が手をつけてくれて，出来はとても良かったと思います。特に，前半の作図の出来は大変良かったです。定規とコンパスを使った作図は高校ではほとんどやらないのですが，コンパスがなくてフリーハンドで描いた人を含めてきちんとできていました。

⑴の外心の作図は辺の垂直２等分線を２本描けば交点を O として作図はＯＫです。

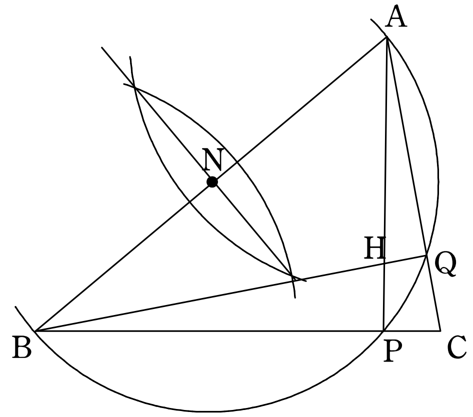
⑵の垂心の作図については各頂点から辺に垂線を引いて垂線の交点 H を求める方法を「解答と解説」に載せましたが，いくつか別解もありました。一つは⑴で求めた辺の中点から辺の両端を通る円を描き，円と他の辺の交点を垂線の足として作図したもので，もう一つは三角形の２辺を用いて，たこ形（等しい対角が少なくとも１組あり，その角から伸びて同じ角で交わる辺が互いに等しいような四角形）を作り，たこ形の対角線が直交することを用いた方法（頂点と対辺に関して対称な点を求めるという考え方だと思ってください）です。採点者としては，このようなこちらで予想していなかった解答が出てくるのがコンテストの採点をする上での楽しみでもあります。

ただ，説明不足で，採点していてどのように作図したのか判断に困るものもありました。図の中にどことどこの長さが等しいのか印をつけるだけでもいいので手順が分かるように作図したほうがいいと思います。

また，垂線を引くために辺に平行な直線を引いた人もいるのですが，平行線を引くためにどのように定規とコンパスを使うのかが示されていないと，正しい定規とコンパスを使った作図とはいえません。

さて，中にはこんな答案もありました。△ABC の外心 O と重心 G を求めて GO の延長上に GH＝2GO を満たす点として H を求める方法です。この方法は有効でしょうか？オイラー線の定理を証明ずみであればその方法も可能なのですが，オイラー線の定理を証明する問題の作図の中でオイラー線の定理を用いるのは反則です，というわけで意図は理解できますが点数は与えていません。

【⑵の別解：その１】



ⅰ）辺 AB の中点を求め，N とする

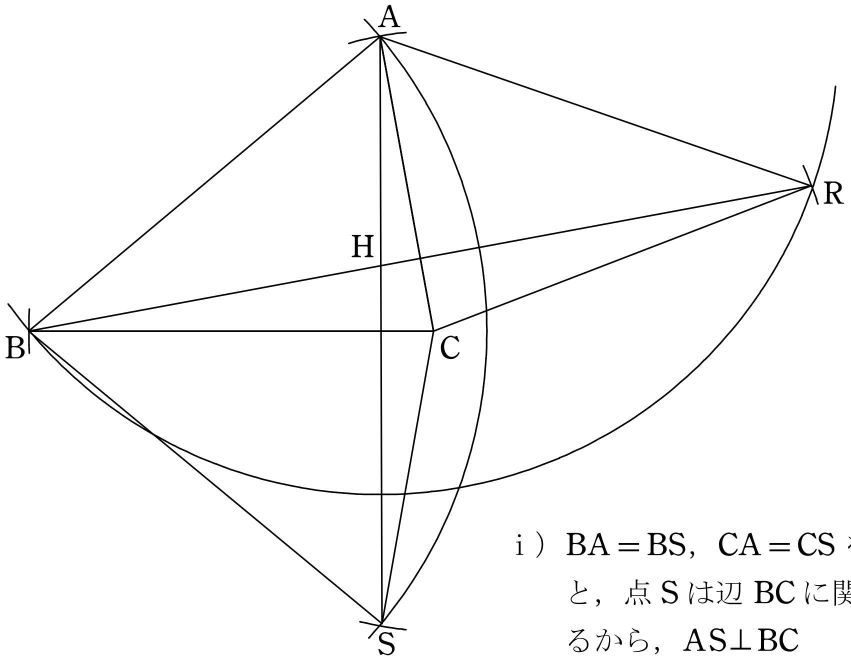
ⅱ）N を中心とし，NA(＝NB) を半径とする円を描く

ⅲ）円と辺 BC，AC との交点をそれぞれ P，Q とする

ⅳ）AB は円の直径であるから，
$\angle APB = \angle AQB = 90°$ が成り立つ

ⅴ）よって，AP と BQ の交点を H とすると，
H は△ABC の垂心である

【(2)の別解：その２】



ｉ）BA＝BS，CA＝CS を満たす点 S をとると，点 S は辺 BC に関して点 A と対称であるから，AS⊥BC

ⅱ）AB＝AR，CB＝CR を満たす点 R をとると，点 R は辺 AC に関して点 B と対称であるから，BR⊥AC

ⅲ）よって，AS と BR の交点を H とすると，H は△ABC の垂心である

⑶は点 D の位置がよければ作図はほとんど問題なしのはずですが，D の位置がずれたために図がおかしくなってしまった人もいました。また，証明でもずいぶん苦労していた人もいました。解答のように直径の両端の中点が円の中心なので三角形の中点連結定理を用いるのが最もシンプルな解答ですし，次の⑸にもつながります。もちろん円周角を使って同位角が等しいでもかまいません。

⑷は平行四辺形であることの証明ですが，１組の対辺が平行というだけで済ませた人が意外に多かったです。もちろん１組の対辺が平行ということでは台形であることしか示せません。平行四辺形であることを証明するには，①２組の対辺がそれぞれ平行であることを示す，②２組の対角の大きさがそれぞれ等しい，③１組の対辺が平行で，かつ長さが等しい，などの方法があります。一番シンプルなのが解答の方法（①）だと思います。円周角の性質と垂線ということから辺に垂直な２辺は平行であるという考え方です。三角形の合同を使って②や③の方法でももちろんいいのですがどうしても説明が長くなってしまいます。また，四角形 ADBH の対角線の中点が一致するとして証明をしようとした人もいましたが，これは平行四辺形であることがわかったときに使える性質です。これまた反則ですので正解にはなりません。

⑸では三角形の相似を示し，相似比を求める問題ですが，⑷で平行条件を示しているので相似については手をつけた人のほとんどが正解でした。相似比は⑶で中点連結定理に気が付いていれば簡単だと思います。ただ，一部に三角形の比ということで面積比を求めていた人もいました。相似比とは対応する辺の長さの比という意味ですので注意してくださ

い。

(6)は３点が一直線上にあるので，相似比 $2:1$ から G' は AL を $2:1$ に内分する点であることを示せばＯＫなのですが，オイラー線の定理の証明としては(6)に続けて最後に「同様に相似より O，G，H も一直線上にあり $OG:GH=1:2$ が成り立つ」をつけておくべきでした。答案の中にはそこまで書きくわえていた人もいたので感心しました。

今回，40点満点の人が全体で53名（全受験者のほぼ２割！）いました。細かな減点があったがおおむね正解としていいと判断できる答案も多くあり大変出来は良かったです。図形の証明は苦手だとか面倒臭いという人もいるとは思いますが，数学の論理の使い方の例としても平面図形の証明は有効なので今後も敬遠せずに取り組んでほしいと思います。

（北海道札幌開成高等学校　佐々木光憲）