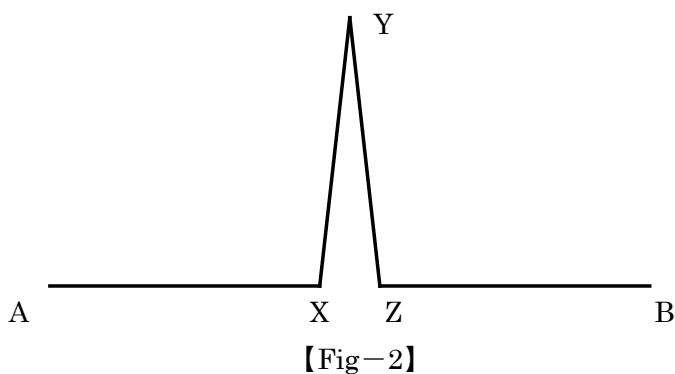
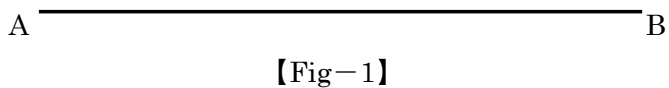


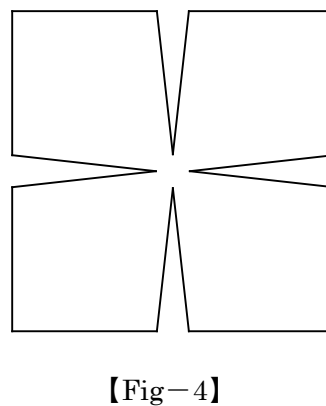
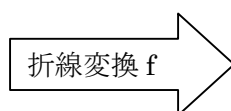
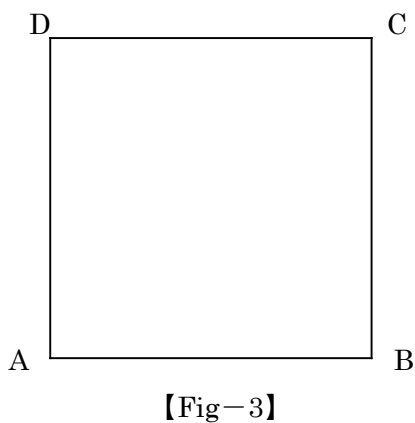
問題 5

下図【Fig-1】のように、長さ 10 の線分 AB が存在する。線分 AB を、【Fig-2】のように $AX=XY=YZ=ZB=\frac{9}{2}$ となる折線 AX - XY - YZ - ZB に変換する。



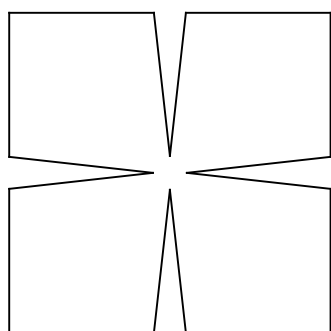
この変換を「折線変換 f」と定義する。

- (1) 【Fig-2】において、 $\triangle XYZ$ の面積を求めよ。
- (2) 【Fig-3】のような 1 辺の長さが 10 である正方形 ABCD の各辺に「折線変換 f」を行った図形【Fig-4】の面積を求めよ。

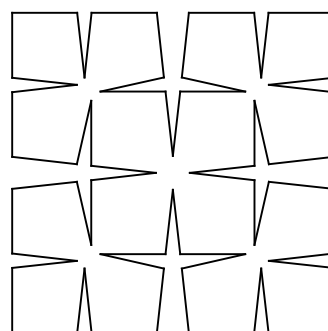
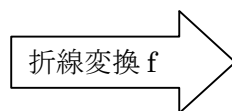


ここで、一般に、長さ l の線分 AB に対しても、 $AX=XY=YZ=ZB=\frac{9}{20}l$ となる折線 AX - XY - YZ - ZB に変換することを「折線変換 f」と呼ぶことにする。

(3) 【Fig-4】の図形の各辺に「折線変換 f」を行った図形【Fig-5】の面積を求めよ。

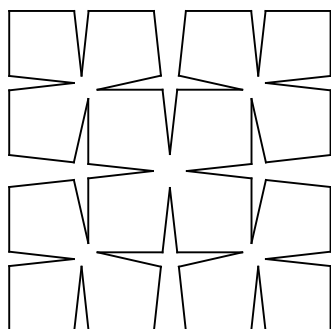


【Fig-4】

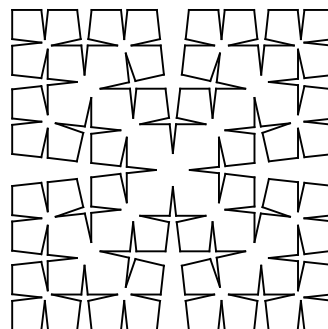
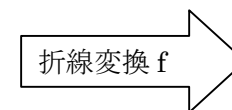


【Fig-5】

(4) 【Fig-5】の図形の各々の辺に「折線変換 f」を行った図形【Fig-6】の面積を求めよ。



【Fig-5】

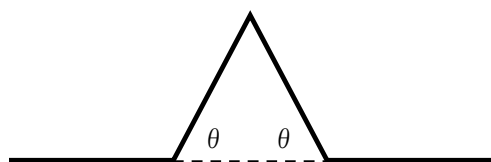


【Fig-6】

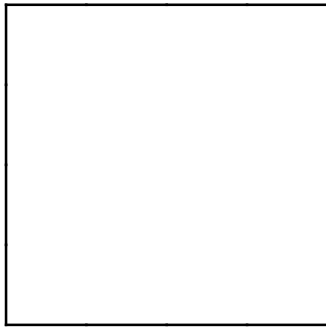
(4) 次に、図【Fig-1】の直線 AB(長さ 10)を 4 等分し、4 等分した点が、【Fig-7】のように関節のように曲がるものとする。この変換を g とする。



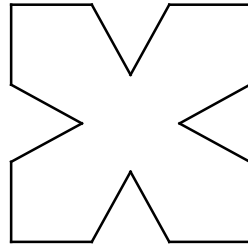
【Fig-1】



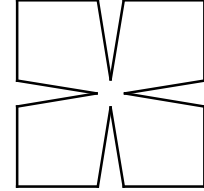
【Fig-7】



【Fig-3】



【Fig-8】



【Fig-9】

この変換 g において、

【Fig-7】のように曲がる角が θ のとき、1辺が10になる正方形【Fig-3】の各辺に、変換 g を実施し【Fig-8】を完成させた。

更に、【Fig-8】の曲がる角 θ を大きくして【Fig-9】を完成させた。角 θ を 0° から 90° まで変化するようにしたがって【Fig-3】の面積 $>$ 【Fig-8】の面積 $>$ 【Fig-9】の面積と変化することがわかる。【Fig-3】と【Fig-9】との面積の比を θ を用いて表せ。

着眼点

「図形と計量」「平面幾何」「帰納的思考」の分野からの出題である。中学生、高校1年生の数学の知識で解法できるように考えた。この問題はフラクタル数学の中の「チェサロ折線」と呼ばれており、多方面に活用されている。

解答例

(1) 線分 AB の中点を M とする。

$$AX=XY=YZ=ZB=\frac{9}{2} \quad AM=\frac{AB}{2}=5$$

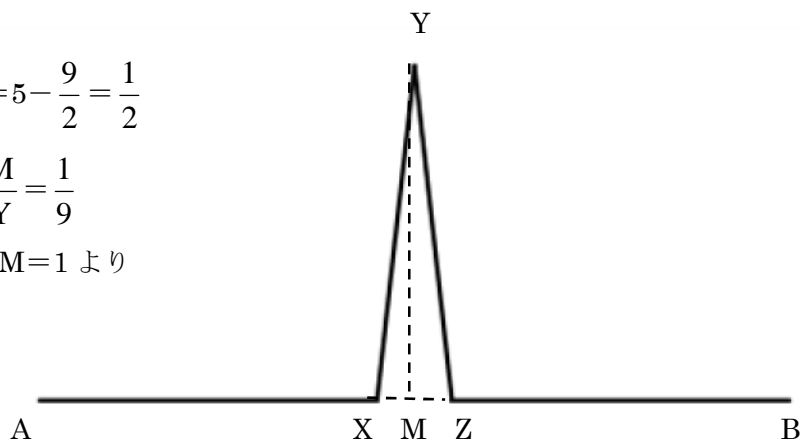
$$XM=AM-AX=5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\cos \angle YXM = \frac{XM}{XY} = \frac{1}{9}$$

$\sin^2 \angle YXM + \cos^2 \angle YXM = 1$ より

$$\sin^2 \angle YXM + \frac{1}{81} = 1$$

$$\sin^2 \angle YXM = \frac{80}{81}$$



$$\sin \angle YXM = \frac{\sqrt{80}}{9} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\triangle XYM \text{ の面積} = \frac{1}{2} XY \times XM \times \sin \angle YXM = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\triangle XYZ \text{ の面積} = 2 \times \triangle XYM \text{ の面積} = \sqrt{5} \dots (\text{答})$$

(2) 右図より

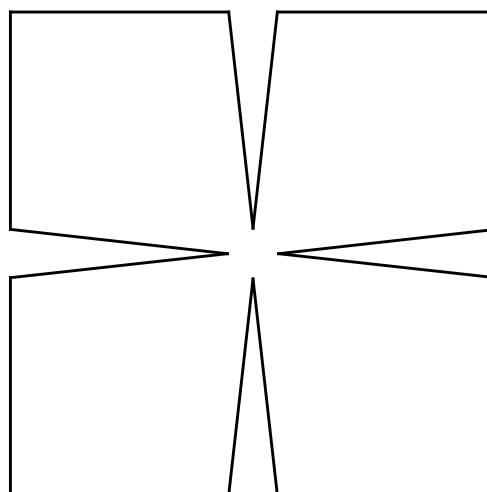
正方形から切り取られる小三角形の数は、4個あるので

求める面積は、

正方形の面積 - 4 × $\triangle XYZ$ の面積

= 100 - 4 × $\sqrt{5}$ の面積

$$= 100 - 4\sqrt{5} \dots (\text{答})$$



(3) 右図より

$$AB : AX = 10 : \frac{9}{2} = 20 : 9$$

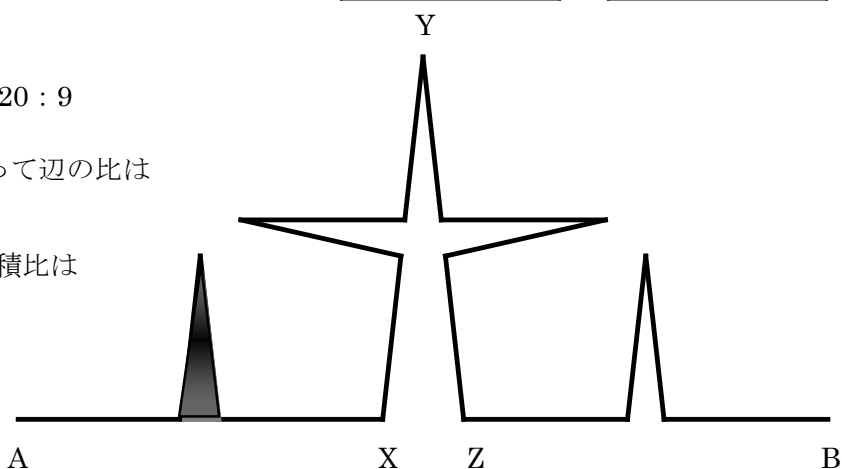
「折線変換 f」によって辺の比は

20 : 9 になる。

新たにできる \blacktriangle の面積比は

$$\triangle : \blacktriangle = 20^2 : 9^2$$

$$= 400 : 81$$



$$\blacktriangle \text{ の面積} = \frac{81}{400} \triangle XYZ = \frac{81\sqrt{5}}{400}$$

右図より、

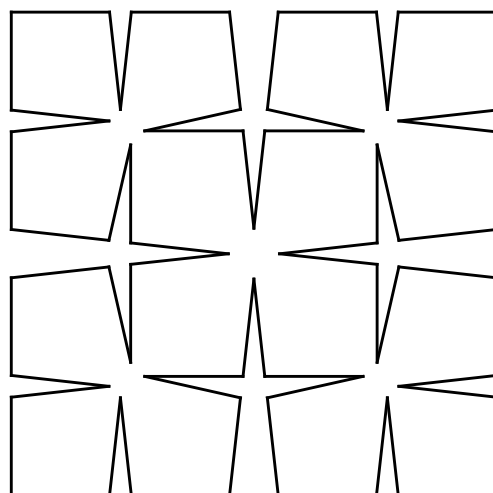
小三角形 \blacktriangle の数は 16 個できるので

$$100 - 4\sqrt{5} - 16 \times \frac{81\sqrt{5}}{400}$$

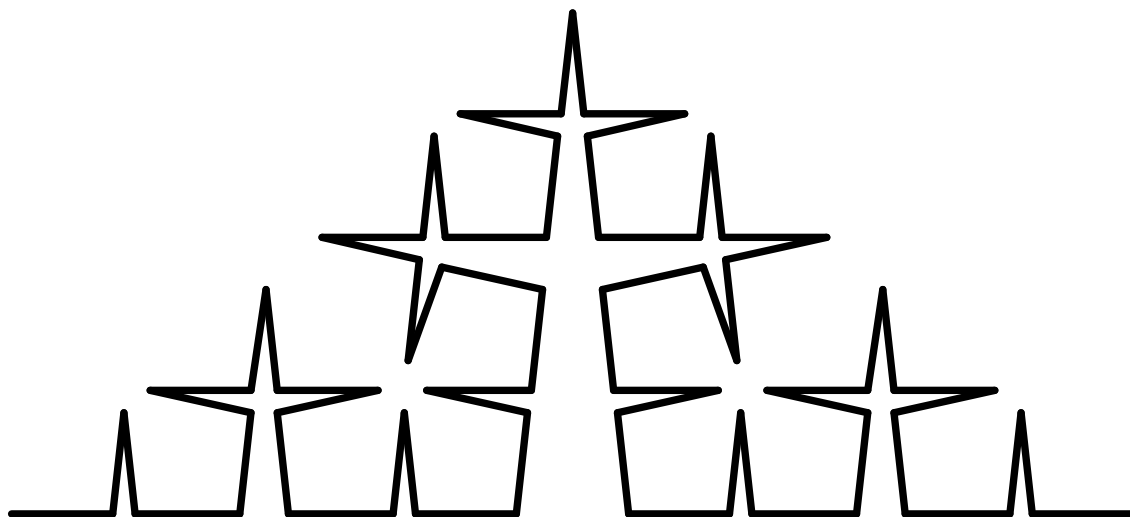
$$= 100 - \frac{181\sqrt{5}}{25} \dots (\text{答})$$

(4)

以下、1 辺に関してこの変換 f を



繰り返すことになる。



	辺の個数	小三角形の個数	小△の面積	折線 1 辺の長さ
折線変換 0 回	4	0	0	10
折線変換 1 回	4^2	4	$\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}$
折線変換 2 回	4^3	4^2	$\left(\frac{9}{20}\right)^2 \sqrt{5} = \frac{81}{400} \sqrt{5}$	$\frac{9}{2} \times \frac{9}{20} = \frac{81}{40}$
折線変換 3 回	4^4	4^3	$\left(\frac{9}{20}\right)^4 \sqrt{5} = \frac{6561}{160000} \sqrt{5}$	$\frac{9}{2} \times \left(\frac{9}{20}\right)^2 = \frac{729}{800}$
折線変換 4 回	4^5	4^4	$\left(\frac{9}{20}\right)^6 \sqrt{5} = \frac{531441}{64000000000} \sqrt{5}$	$\frac{9}{2} \times \left(\frac{9}{20}\right)^3 = \frac{6561}{16000}$

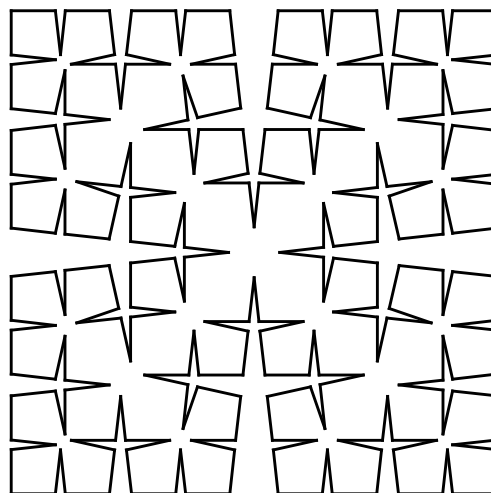
以下、折線 1 辺の長さは $\frac{9}{20}$ 倍の割合で減少していく。(公比 $\frac{9}{20}$ の等比数列)

小△の面積は $\left(\frac{9}{20}\right)^2$ 倍の割合で減少していく。(公比 $\left(\frac{9}{20}\right)^2$ の等比数列)

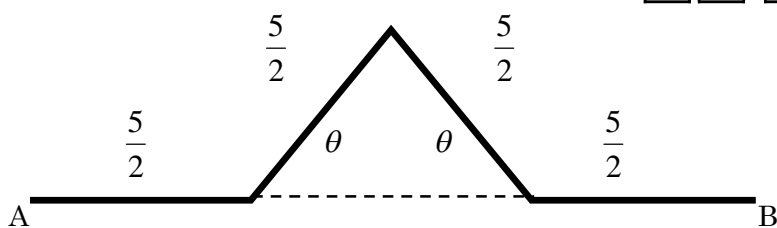
折線変換 3 回によってできる面積 (右図) は,

$$100 - 4\sqrt{5} - 16 \times \frac{81\sqrt{5}}{400} - 64 \times \frac{6561\sqrt{5}}{160000}$$

$$= 100 - \frac{24661\sqrt{5}}{2500} \dots (\text{答})$$



(5)



$$\text{線分 } AB = 2 \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cos \theta \right) = 5(1 + \cos \theta)$$

1 辺の長さが $5(1 + \cos \theta)$ の正方形の

$$\text{面積} = 25(1 + \cos \theta)^2 \dots \textcircled{1}$$

三角形の個数 = 4 (個) $\dots \textcircled{2}$

$$\text{三角形の面積} = 2 \times \frac{5}{2} \cos \theta \times \frac{5}{2} \sin \theta \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4} \sin \theta \cos \theta \dots \textcircled{3}$$

右図の面積 = $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times \textcircled{3}$

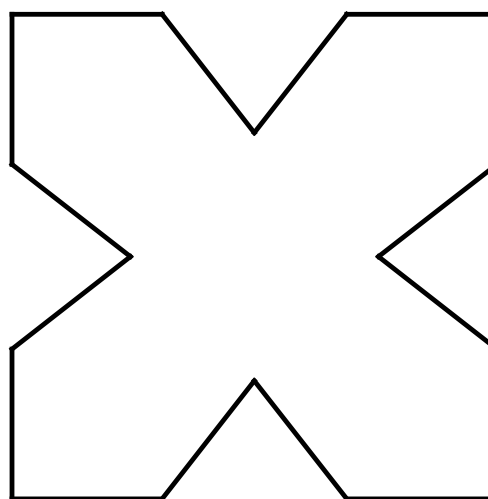
$$= 25(1 + \cos \theta)^2 - 4 \times \frac{25}{4} \sin \theta \cos \theta$$

$$= 25(1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) \dots \textcircled{4}$$

よって, 求める面積の比は

$$100 : 25(1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) = 4 : (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) \dots (\text{答})$$

$\textcircled{4}$ のグラフを作成すると,



右のようなグラフとなる。

