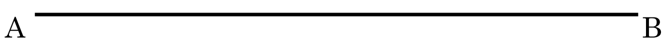
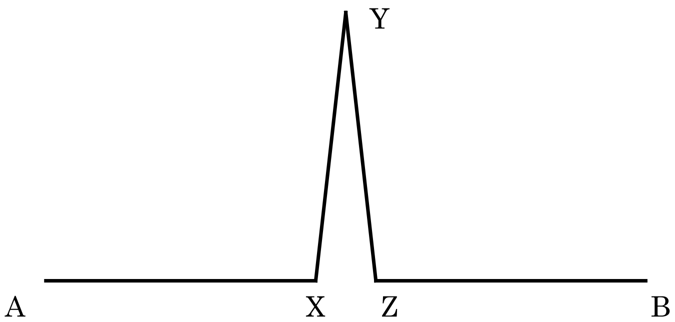
問題５

下図【Fig－1】のように，長さ 10 の線分 AB が存在する。線分 AB を，【Fig－2】のように $AX=XY=YZ=ZB=\dfrac{9}{2}$ となる折線 AX‐XY‐YZ‐ZB に変換する。



【Fig－1】

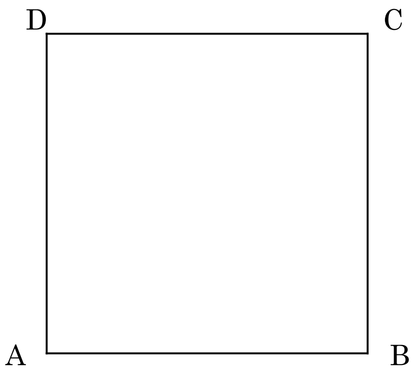


【Fig－2】

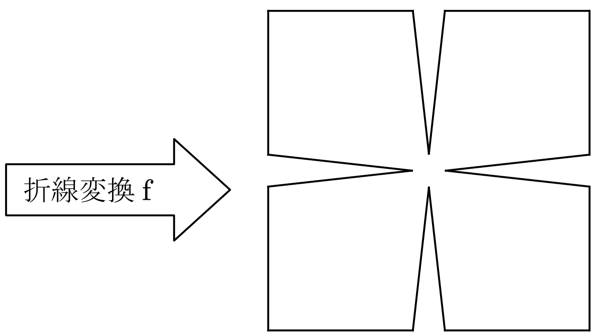
この変換を「折線変換 f」と定義する。

(1) 【Fig－2】において，△XYZ の面積を求めよ。

(2) 【Fig－3】のような１辺の長さが 10 である正方形 ABCD の各辺に「折線変換 f」を行った図形【Fig－4】の面積を求めよ。



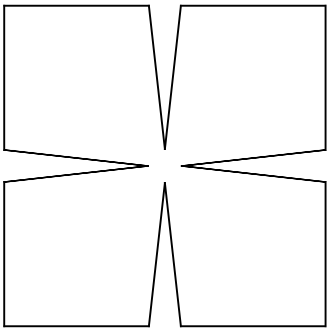
【Fig－3】



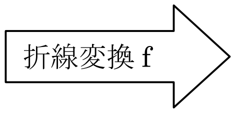
【Fig－4】

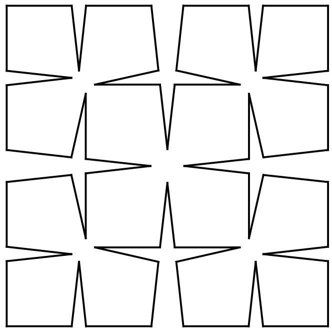
ここで，一般に，長さ l の線分 AB に対しても，$AX=XY=YZ=ZB=\dfrac{9}{20}l$ となる折線 AX‐XY‐YZ‐ZB に変換することを「折線変換 f」と呼ぶことにする。

(3) 【Fig－4】の図形の各辺に「折線変換 f」を行った図形【Fig－5】の面積を求めよ。



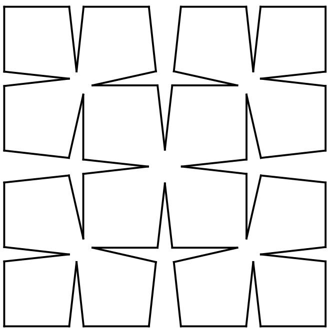
【Fig－4】



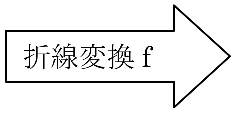


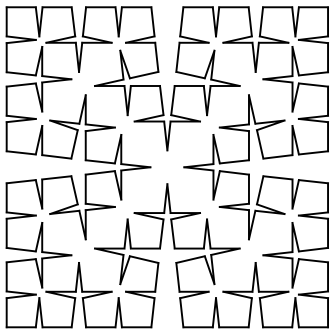
【Fig－5】

(4)【Fig－5】の図形の各々の辺に「折線変換 f」を行った図形【Fig－6】の面積を求めよ。



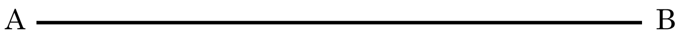
【Fig－5】



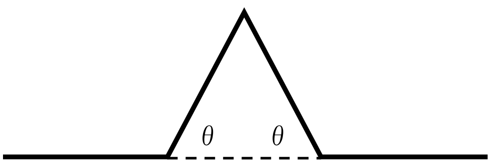


【Fig－6】

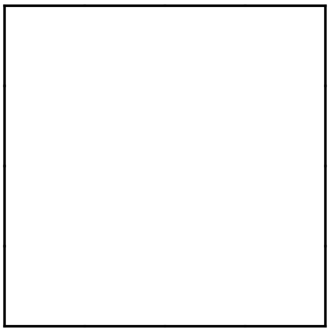
(4) 次に，図【Fig－1】の直線 AB(長さ 10)を 4 等分し，4 等分した点が,【Fig－7】のように関節のように曲がるものとする。この変換を g とする。



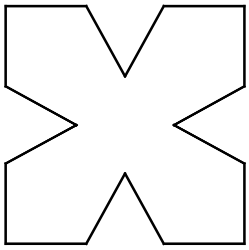
【Fig-1】



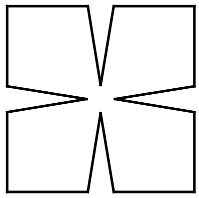
【Fig－7】



【Fig－3】



【Fig－8】



【Fig－9】

この変換 g において，
【Fig－7】のように曲がる角が θ のとき，１辺が 10 になる正方形【Fig－3】の各辺に，変換 g を実施し【Fig－8】を完成させた。
更に，【Fig－8】の曲がる角 θ を大きくして【Fig－9】を完成させた。角 θ を 0° から 90° まで変化するにしたがって【Fig－3】の面積＞【Fig－8】の面積＞【Fig－9】の面積と変化することがわかる。【Fig－3】と【Fig－9】との面積の比を θ を用いて表せ。

着眼点

「図形と計量」「平面幾何」「帰納的思考」の分野からの出題である。中学生，高校１年生の数学の知識で解法できるように考えた。この問題はフラクタル数学の中の「チェサロ折線」と呼ばれており，多方面に活用されている。

解答例

(1) 線分 AB の中点を M とする。

$$\mathrm{AX=XY=YZ=ZB}=\frac{9}{2} \qquad \mathrm{AM}=\frac{\mathrm{AB}}{2}=5$$

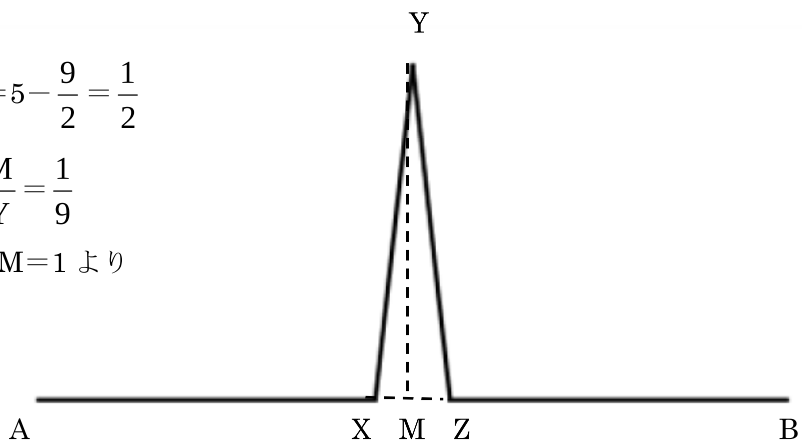
$$\mathrm{XM}=\mathrm{AM}-\mathrm{AX}=5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\angle\mathrm{YXM}=\frac{\mathrm{XM}}{\mathrm{XY}}=\frac{1}{9}$$

$\sin^2\angle\mathrm{YXM}+\cos^2\angle\mathrm{YXM}=1$ より

$$\sin^2\angle\mathrm{YXM}+\frac{1}{81}=1$$

$$\sin^2\angle\mathrm{YXM}=\frac{80}{81}$$

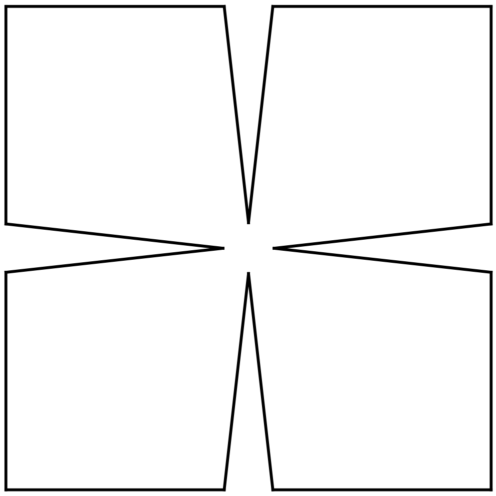


$\sin\angle \mathrm{YXM} = \dfrac{\sqrt{80}}{9} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

$\triangle \mathrm{XYM}$ の面積＝$\dfrac{1}{2}\mathrm{XY}\times\mathrm{XM}\times\sin\angle\mathrm{YXM} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\triangle \mathrm{XYZ}$ の面積＝2×$\triangle \mathrm{XYM}$ の面積＝$\sqrt{5}$…（答）

（2）右図より



正方形から切り取られる小三角形の数は，4 個あるので

求める面積は，

正方形の面積－4×△XYZ の面積

＝100－$4\sqrt{5}$…（答）

（3）右図より

AB：AX＝10：$\dfrac{9}{2}$＝20：9

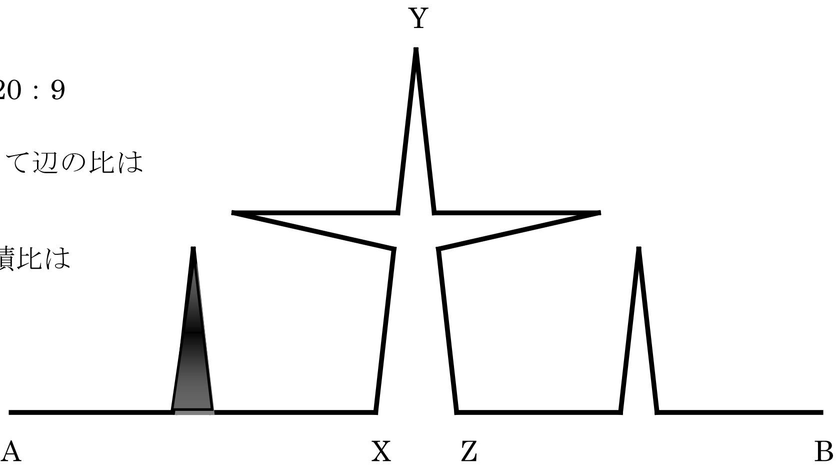
「折線変換 f」によって辺の比は

20：9 になる。

新たにできる▲の面積比は

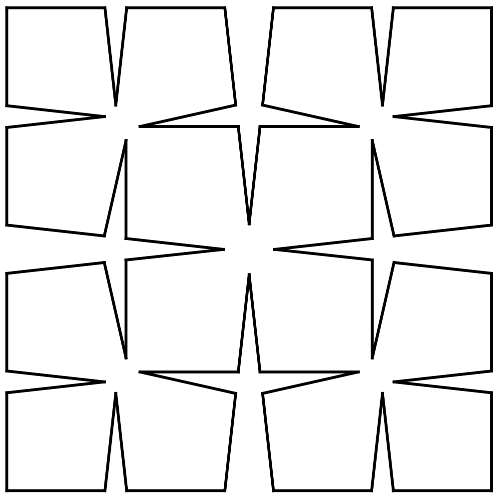
△：▲＝20^2：9^2

　　　＝400：81



▲の面積＝$\dfrac{81}{400}$△XYZ＝$\dfrac{81\sqrt{5}}{400}$

右図より，



小三角形▲の数は 16 個できるので

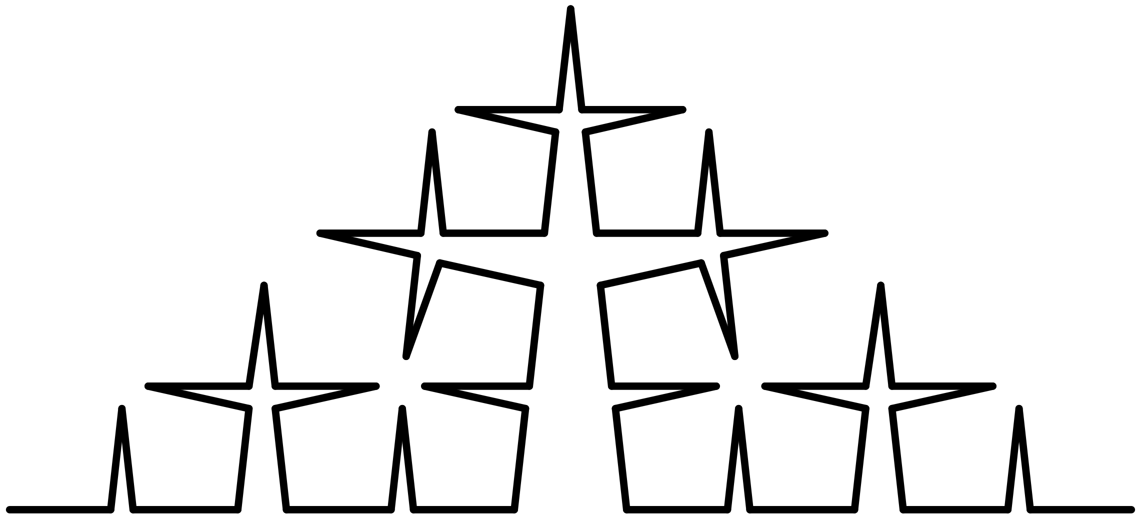
$100-4\sqrt{5}-16\times\dfrac{81\sqrt{5}}{400}$

$=100-\dfrac{181\sqrt{5}}{25}$…（答）

（4）

以下，１辺に関してこの変換 f を

繰り返すことになる。



	辺の個数	小三角形の個数	小△の面積	折線１辺の長さ
折線変換０回	4	0	0	10
折線変換１回	4^2	4	$\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}$
折線変換２回	4^3	4^2	$\left(\frac{9}{20}\right)^2\sqrt{5}=\frac{81}{400}\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\times\frac{9}{20}=\frac{81}{40}$
折線変換３回	4^4	4^3	$\left(\frac{9}{20}\right)^4\sqrt{5}=\frac{6561}{160000}\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\times\left(\frac{9}{20}\right)^2=\frac{729}{800}$
折線変換４回	4^5	4^4	$\left(\frac{9}{20}\right)^6\sqrt{5}=\frac{531441}{64000000000}\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\times\left(\frac{9}{20}\right)^3=\frac{6561}{16000}$

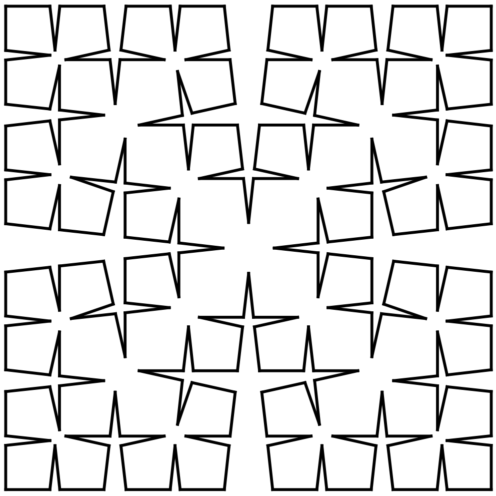
以下，折線１辺の長さは$\frac{9}{20}$倍の割合で減少していく。（公比$\frac{9}{20}$の等比数列）

小△の面積は$\left(\frac{9}{20}\right)^2$倍の割合で減少していく。（公比$\left(\frac{9}{20}\right)^2$の等比数列）

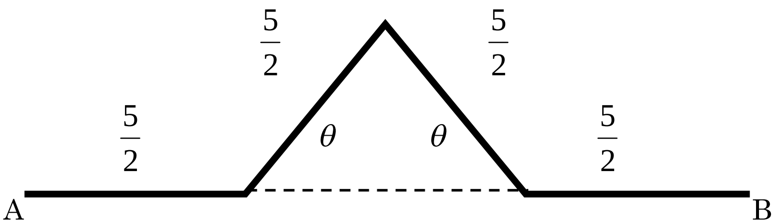
折線変換３回によってできる面積（右図）は，

$100-4\sqrt{5}-16\times\frac{81\sqrt{5}}{400}-64\times\frac{6561\sqrt{5}}{160000}$

$=100-\frac{24661\sqrt{5}}{2500}$ …（答）



(5)



線分 AB$=2\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cos\theta\right)=5(1+\cos\theta)$

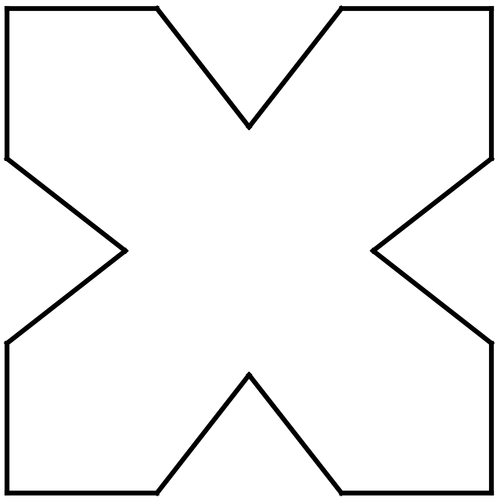
１辺の長さが $5(1+\cos\theta)$ の正方形の

面積$=25(1+\cos\theta)^2$ …①

三角形の個数＝4（個）…②

三角形の面積$=2\times\frac{5}{2}\cos\theta\times\frac{5}{2}\sin\theta\times\frac{1}{2}$

$=\frac{25}{4}\sin\theta\cos\theta$ …③



右図の面積＝①－②×③

$=25(1+\cos\theta)^2-4\times\frac{25}{4}\sin\theta\cos\theta$

$=25(1+2\cos\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)$ …④

よって，求める面積の比は

$100:25(1+2\cos\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)=4:(1+2\cos\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)$ …（答）

④のグラフを作成すると，

右のようなグラフとなる。