問題４

関数 $f(x)$ は次の条件(Ⅰ)〜(Ⅳ)を満たしている。

(Ⅰ) 定義域は $-1<x<1$，値域は実数全体である。

(Ⅱ) $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$

（$-1<x<1$，$-1<y<1$ のとき，$-1<\dfrac{x+y}{1+xy}<1$ である。）

(Ⅲ) $f\left(\dfrac{9}{11}\right)=1$

(Ⅳ) 任意の実数 k に対して，方程式 $f(x)=k$ を満たす x は，ただ１つ存在する。

次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。

(2) $f(-x)=-f(x)$ を示せ。

(3) $f(x)=-1$，$f(x)=2$，$f(x)=3$ となる x の値をそれぞれ求めよ。

(4) $f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)=s$，$f\left(\dfrac{x-y}{1-xy}\right)=t$ のとき，$f(x)$，$f(y)$ を s，t で表せ。さらに，$f(x)\cdot f(y)=2009$ を満たす s，t の値を求めよ。ただし，s，t は正の整数とする。

(5) (4)で求めた s，t のうち，s の最大値を s_0，そのときの t の値を t_0 とするとき，$f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)=s_0$，$f\left(\dfrac{x-y}{1-xy}\right)=t_0$ となる x の値を推定せよ。ただし，s，t の値が１組しかないときは，それを s_0，t_0 とする。

$\boxed{\text{着眼点}}$

関数 $f(x)=\log_{10}\dfrac{1+x}{1-x}$ がもつ性質を利用して作問しましたが，この関数に気がついた生徒は少なかったと思います。

(1)(2)は関数方程式の問題ではよくある設問であり，勉強したことがある生徒は容易に解答できると思います。

(3)は方程式を解くというより，$f(x)=k$ となる x を見つけていく設問であり，そのために条件(Ⅳ)をつけました。

(4)は $f(-x)=f(x)$ の利用が大切かと思います。s，t は正の整数なので簡単な整数問題ですが，$2009=7^2\times 41$ の素因数分解に気づくことが重要です。

$f(x)=k$ となる x は $x=\dfrac{10^k-1}{10^k+1}$ であり，数列の知識がある生徒が有利だったかと思います。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1) 条件(Ⅱ)に $x=0$，$y=0$ を代入すると　　$f(0)+f(0)=f(0)$

よって　　$f(0)=0$

(2)　条件(Ⅱ)に $y=-x$ を代入すると　　$f(x)+f(-x)=f(0)$

(1)の結果から　　$f(x)+f(-x)=0$

ゆえに　　$f(-x)=-f(x)$

(3)　(2)の結果と条件(Ⅲ)から　　$f\left(-\dfrac{9}{11}\right)=-f\left(\dfrac{9}{11}\right)=-1$

よって，$f(x)=-1$ を満たす x は $x=-\dfrac{9}{11}$

条件(Ⅲ)から　　$2=1+1=f\left(\dfrac{9}{11}\right)+f\left(\dfrac{9}{11}\right)$

条件(Ⅱ)より　　$f\left(\dfrac{9}{11}\right)+f\left(\dfrac{9}{11}\right)=f\left(\dfrac{\dfrac{9}{11}+\dfrac{9}{11}}{1+\dfrac{9}{11}\times\dfrac{9}{11}}\right)=f\left(\dfrac{\dfrac{18}{11}}{\dfrac{202}{121}}\right)=f\left(\dfrac{99}{101}\right)$

よって，$f(x)=2$ を満たす x は $x=\dfrac{99}{101}$

上の結果と条件(Ⅲ)(Ⅱ)から

$$3=2+1=f\left(\frac{99}{101}\right)+f\left(\frac{9}{11}\right)=f\left(\frac{\dfrac{99}{101}+\dfrac{9}{11}}{1+\dfrac{99}{101}\times\dfrac{9}{11}}\right)=f\left(\frac{\dfrac{1998}{1111}}{\dfrac{2002}{1111}}\right)=f\left(\frac{999}{1001}\right)$$

よって，$f(x)=3$ を満たす x は $x=\dfrac{999}{1001}$

(4)　$f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)=s$ より　$f(x)+f(y)=s$　…①

$f\left(\dfrac{x-y}{1-xy}\right)=t$ より　$f(x)-f(y)=t$　…②

①＋②より　$2f(x)=s+t$　　ゆえに　$f(x)=\dfrac{s+t}{2}$

①－②より　$2f(y)=s-t$　　ゆえに　$f(y)=\dfrac{s-t}{2}$

よって，$f(x)\cdot f(y)=2009$ より　　$\dfrac{(s+t)(s-t)}{4}=2009$

$$(s+t)(s-t)=4\times2009$$
$$=2^2\times7^2\times41$$

s，t は正の整数なので，$s+t$，$s-t$ も整数である

積 $(s+t)(s-t)$ が偶数であることから，$s+t$，$s-t$ の少なくとも一方は偶数であり，

和 $(s+t)+(s-t)=2s$ は偶数なので，$s+t$，$s-t$ の奇偶は一致する

よって，$s+t$，$s-t$ はともに正の偶数であることがわかる

したがって　　$(s+t,\ s-t)=(4018,\ 2)$，$(574,\ 14)$，$(98,\ 82)$

ゆえに　　$(s,\ t)=(2010,\ 2008)$，$(294,\ 280)$，$(90,\ 8)$

(5)　(4)の結果より　　$s_0=2010$，$t_0=2008$

したがって，$f(x)=2009$ となる x を推定することになる

ここで，$f(x)=1$，$f(x)=2$，$f(x)=3$ となる x の値は，それぞれ $x=\frac{9}{11}=\frac{10-1}{10+1}$，

$x=\frac{99}{101}=\frac{10^2-1}{10^2+1}$，$x=\frac{999}{1001}=\frac{10^3-1}{10^3+1}$ と表すことができるので

$f(x)=2009$ となる x の値は $x=\frac{10^{2009}-1}{10^{2009}+1}$ と推定できる