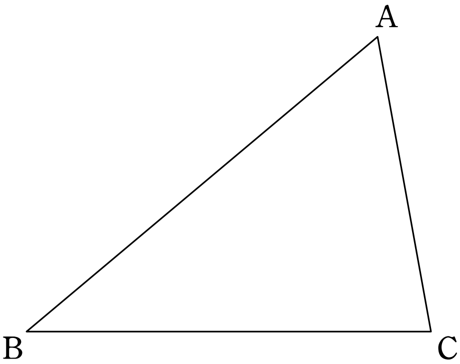
問題２



△ABCにおいて，各辺の垂直二等分線の交点を外心(三角形の外接円の中心)，中線(各辺の中点ともう一つの頂点を結んだ線分)の交点を重心，各頂点から向かい合う辺に引いた垂線の交点を垂心といい，それぞれO，G，H表す。なお，外心，重心，垂心のいずれについても３線が一点で交わること(たとえば，外心を求める場合，２線の交点として求めてよい)，および，重心Gは中線を2：1に内分する点であることは証明せずに使ってよい。また，鈍角三角形の場合など，三角形の形状によっては異なる図で考えなければならない場合もあるが，本問においては鋭角三角形の場合のみ考えることとする。

(1)　解答用紙図１の△ABCについて，辺BCの垂直２等分線および辺CAの垂直２等分線を定規とコンパスを使って作図し，外心Oを求めよ。(三角定規の直角を用いてはいけない)　なお，作図に使った点や線，コンパスの線の跡は消さないこと。

(2)　解答用紙図２の△ABCについて，点Aから辺BCに引いた垂線および点Bから辺CAに引いた垂線を定規とコンパスを使って作図し，垂心Hを求めよ。(三角定規の直角を用いてはいけない)　なお，作図に使った点や線，コンパスの線の跡は消さないこと。

（なお，定規とコンパスがない場合，フリーハンドで図をかいてもよいが，コンパスの使用箇所について説明とコンパスの線の跡を描き入れること。）

一般に，△ABCの外心O，重心G，垂心Hは一直線上にあり，GH＝2GOが成り立っている。(このことをオイラー線の定理と呼ぶことがあり，３点O，G，Hを通る直線をオイラー線という。)　このことを証明したい。

(3)　△ABCについて，辺BCの中点をL，外接円の直径をCDとするとき，DBとOLは平行である。このことを表す図を図３の中に描き，このことを証明せよ。

(4)　四角形ADBHは平行四辺形であることを証明せよ。

(5)　線分OHと線分ALの交点をG′とするとき，△G′AHと△G′LOが相似であることを示し，相似比を求めよ

(6) 点G′が△ABCの重心Gと一致することを証明せよ

補足：オイラー線の定理を証明する方法は他にもある，(3)～(6)の方法を用いずに証明してもよいが，その場合は解答用紙に別解と明記した上で解答すること。

$\boxed{\text{着眼点}}$

どんな形の三角形についても，外心O，重心G，垂心Hは一直線上にあり，GH＝2GOが成り立つことを発見したのは１８世紀のスイスの数学者オイラーです。そ

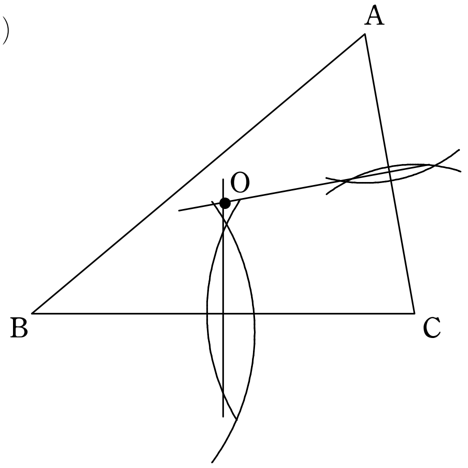
のことから三角形の外心，重心，垂心を通る直線をオイラー線といいます。

オイラー線の証明には色々な方法があります。本問のように平面図形の性質を用いる方法[(3)〜(6)の方法]が標準的な方法だと思われますが，ほかにも平面座標の考えを用いた証明やベクトルを用いた証明などさまざまな方法があります。きちんとした証明であればどの方法を使ってもかまいません。

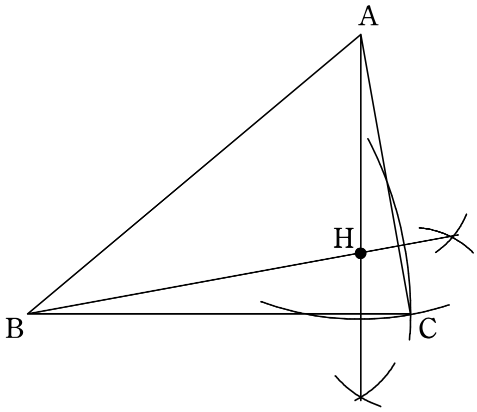
なお，すべての三角形について証明するためには，△ABC が直角三角形の場合や鈍角三角形の場合など，場合分けの必要があります。しかし，本問においては問題文中の図のような三角形（鋭角三角形）についてのみ示せばよいことにしました。

解答例

(1)



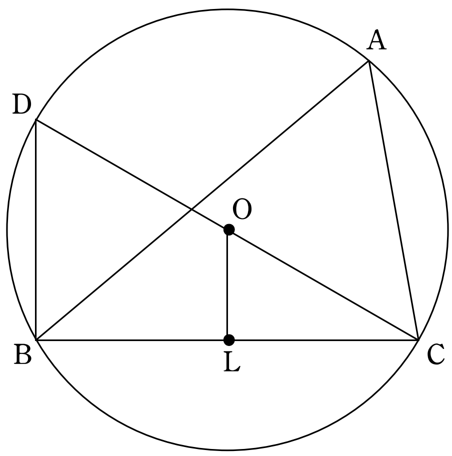
(2)



(3)　L は BC の中点　…①

CD が直径であることと O が円の中心であることから，O は CD の中点　…②

①②より，△BCD において中点連結定理により　　DB∥OL



(4)　CD が円の直径であることから

$\angle DBC=90^\circ$　すなわち　DB⊥BC

また，AH は点 A から辺 BC に引いた垂線であることから　　AH⊥BC

よって　　　AH∥DB　…②

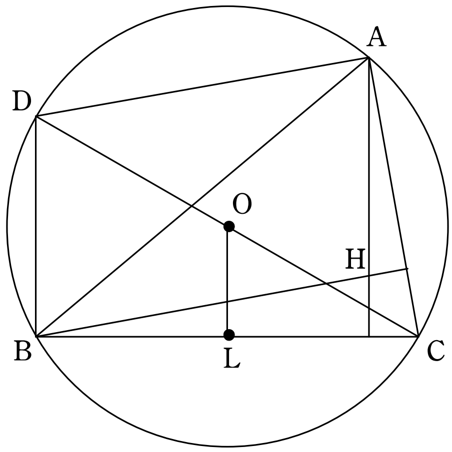
同様に，CD が円の直径であることから

$\angle DAC=90^\circ$　すなわち　DA⊥AC

また，BH は点 B から辺 AC に引いた垂線であることから　　BH⊥AC

よって　　　BH∥DA　…②

①と②から，四角形 ADBH は２組の向かい合う辺が平行なので平行四辺形である



(5)　(3)より　　DB∥OL

　(4)より　　AH∥DB

よって　　AH∥OL

したがって

∠G′AH＝∠G′LO　かつ　∠G′HA＝∠G′OL

ゆえに　　△G′AH∽△G′LO

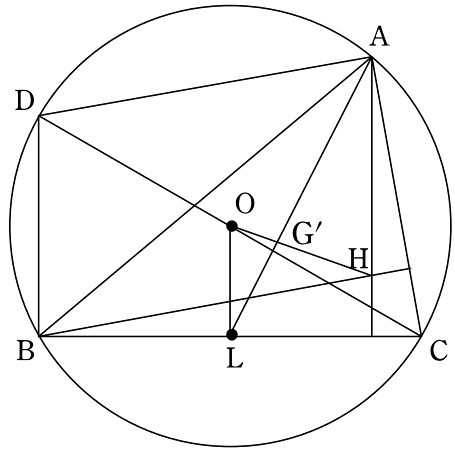
ここで，(3)の中点連結定理から

BD＝2LO

また，四角形 ADBH が平行四辺形であることから

BD＝AH

よって，AH＝2LO であるから，△G′AH と△G′LO の相似比は 2 : 1



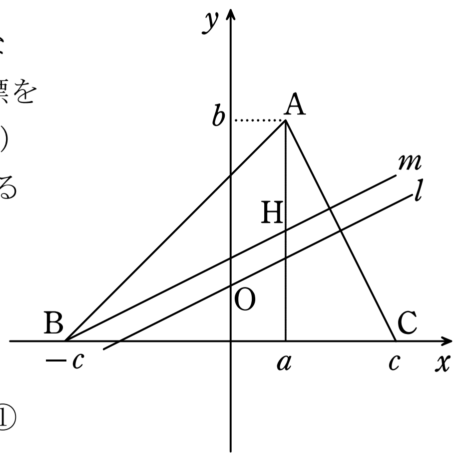
(6)　(5)の結果より G′A : G′L＝2 : 1 であるから，点 G′ は中線 AL を 2 : 1 内分する点になるので，G′ は△ABC の重心 G と一致する

《別解その１（座標を用いた方法）》

直線 BC を x 軸に，BC の中点を通り BC に垂直な直線を y 軸にとって，四角形 ABCD の各頂点の座標を

A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$　（ただし，$b\fallingdotseq 0$）

とおく（$a=\pm c$ のときは△ABC が直角三角形になるので，$a\fallingdotseq\pm c$ として考える）



このとき，△ABC の重心 G の座標は

$\left(\dfrac{a+(-c)+c}{3},\ \dfrac{b+0+0}{3}\right)$　より　G$\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{b}{3}\right)$

BC の垂直２等分線は y 軸であるから　$x=0$　…①

AC の垂直２等分線 l は AC の中点 $\left(\dfrac{a+c}{2},\dfrac{b}{2}\right)$ を通り，AC に垂直である

AC の傾きは $\dfrac{0-b}{c-a}=-\dfrac{b}{c-a}$ なので，l の傾きは $\dfrac{c-a}{b}$

よって，l の方程式は　$y-\dfrac{b}{2}=\dfrac{c-a}{b}\left(x-\dfrac{a+c}{2}\right)$

すなわち　$y=\dfrac{c-a}{b}x+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$　…②

よって，外心 O は垂直２等分線の交点であるから，①②より　O$\left(0,\ \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)$

また，A から辺 BC に引いた垂線は　$x=a$　…③

B から辺 AC に引いた垂線は B$(-c,\ 0)$ を通り，AC に垂直（傾き $\dfrac{c-a}{b}$）なので

$$y=\frac{c-a}{b}\{x-(-c)\}\qquad \text{すなわち}\qquad y=\frac{c-a}{b}x+\frac{c^2-ac}{b}\quad\cdots④$$

よって，垂心 H は垂線の交点であるから，③④より　$\mathrm{H}\left(a,\ \dfrac{c^2-a^2}{b}\right)$

線分 OH を 1 : 2 に内分する点の座標は

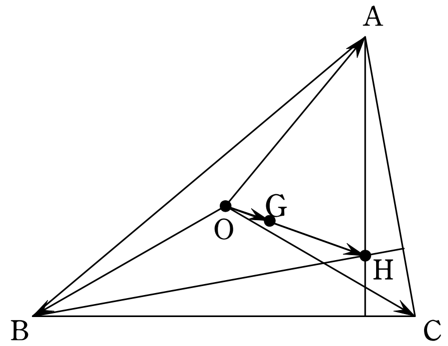
$$\left(\frac{2\cdot 0+1\cdot a}{1+2},\ \frac{2\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}+1\cdot\dfrac{c^2-a^2}{b}}{1+2}\right)\ \text{より}\ \left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$$

これは△ABC の重心 G の座標と一致する

ゆえに，３点 O，G，H は一直線上にあり，OG : GH＝1 : 2 である

《別解その２（ベクトルの利用）》

△ABC において，その外心 O を始点とする位置ベクトルを考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする



O は外接円の中心であるから OA＝OB＝OC が成り立つので　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$

また，△ABC 重心 G の位置ベクトルを $\vec{g}$ とすると

$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$　である

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ となる点 Hを考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{h}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{h}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2=0$$

が成り立つので　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって，点 H は△ABC の垂心である

このとき，$\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\vec{g}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

ゆえに，３点 O，G，H は一直線上にあり，OG : GH＝1 : 2 である